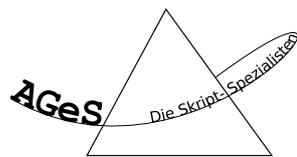


EXPERIMENTALPHYSIK III

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Weber
(Wintersemester 07/08)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort (zuerst lesen)	3
1 Wellenoptik	4
1.1 Geometrische Optik	4
1.2 Huygens'sches Prinzip	5
1.3 Fermat'sches Prinzip	10
1.4 Polarisierung von Licht	12
1.5 Fresnel'sche Formeln	20
2 Wellen und Wellenpakete	26
2.1 Fourieranalyse periodischer Schwingungen	26
2.2 Wellen in einer Raumdimension	29
2.3 Welle in drei Raumdimensionen	30
2.4 Harmonische Welle und Fourieranalyse	30
2.5 Dispersionsbehaftete Wellen	31
3 Interferenz und Beugung	32
3.1 Phasendifferenz und Kohärenz	33
3.2 Interferenz am Doppelspalt	43
3.3 Vektoraddition von harmonischen Wellen	45
3.4 Beugung am Einzelspalt	47
3.5 Beugung am realen Doppelspalt	49
3.6 Fraunhofer- und Fresnel-Beugung	49

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir Euch darauf hinweisen, dass dieses Skript weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes ersetzt. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes für Probleme insbesondere im Verständnis des Stoffes sorgen.

Das liegt daran, dass das Skript nicht als vorgekauter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Gut geeignet ist das Skript einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
www.ages-skripte.org

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

1 Wellenoptik

Drei verschiedene Konzepte für die Natur des Lichts

- Lichtstrahlen
- Lichtwellen
- Lichtquanten

Lichtstrahlen (Newton)

→ Problem: Lichtgeschwindigkeit ist größer in Medien mit größerer optischer Dichte. (**falsch**)

Lichtwellen (Fresnel, Huygens, Young)

→ Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium ist kleiner als im Vakuum. (**richtig**)

Lichtquanten (Planck, Einstein)

1.1 Geometrische Optik

Maxwell Gleichungen (1873) → elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \frac{\vec{E}_0}{c} \right)}_{\vec{e}_k} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\end{aligned}$$

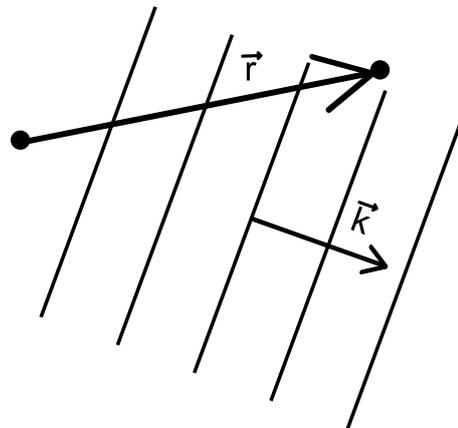
$$\vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$$

Lichtgeschwindigkeit: c

Wellenzahlvektor: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{e}_k$

$$\omega = 2\pi\nu = c \cdot k, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad |\vec{B}| = \left| \frac{\vec{E}_0}{c} \right|$$

Nachweis der elektromagnetischen Wellen: Hertz



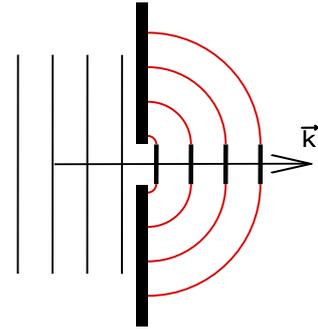
Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle

Beugung im Spalt

geometrische Optik: Geradlinige Ausbreitung (schwarz)

Dies gilt aber nur im Grenzfall $D \gg \lambda$

Beobachtung: Beugung hinter dem Spalt (rot)



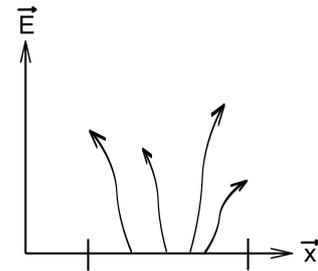
Warum kann sich das Licht nicht geradlinig nach dem Spalt ausbreiten?

Vor dem Spalt: elektrische Felder

⇒ Maxwellgleichung: $\text{div } \vec{E} = 0$

⇒ keine Grenze (Senke)

⇒ Licht breitet sich hinter Spalt aus

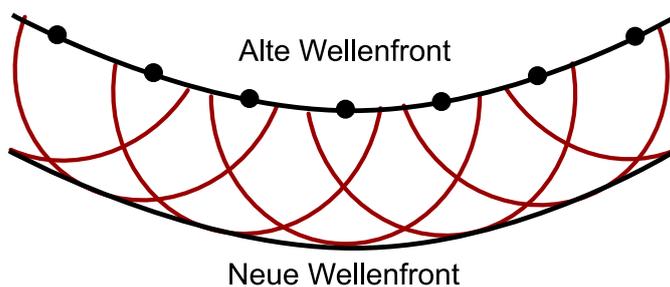
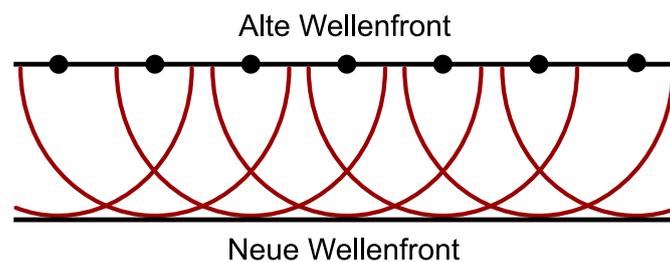


1.2 Huygens'sches Prinzip

Huygensche Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Welle (**Elementarwelle**) mit gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Welle. (siehe Tipler 1028 ff, Hecht 103, 650)

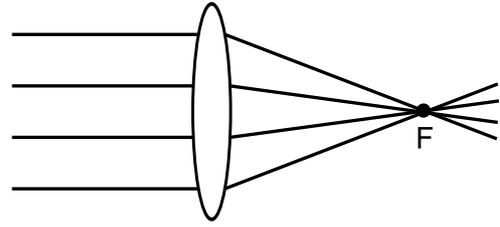
Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.



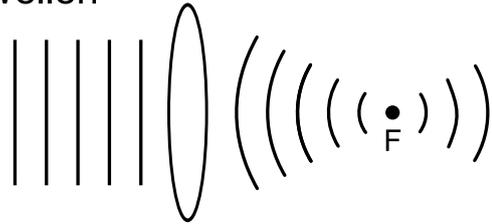
Brechung an Linsen

Geometrische und Wellenoptik können die Brechung beschreiben.

Strahlen



Wellen

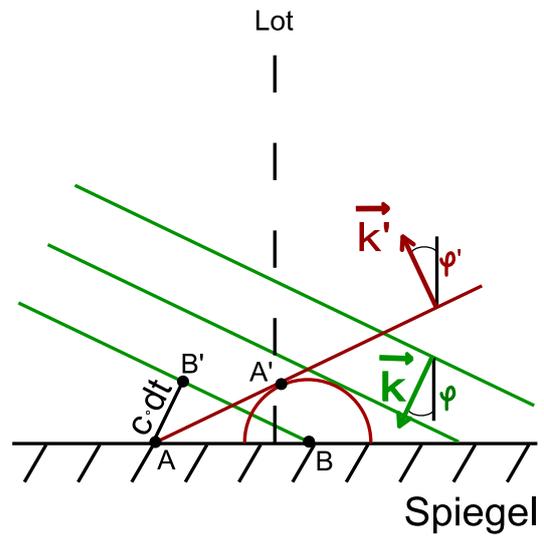


Reflexion

$\triangle B'AB$ hat die gleichen Winkel wie $\triangle AA'B$

$$\overline{B'A} = \overline{A'B}$$

$$\varphi = \varphi'$$

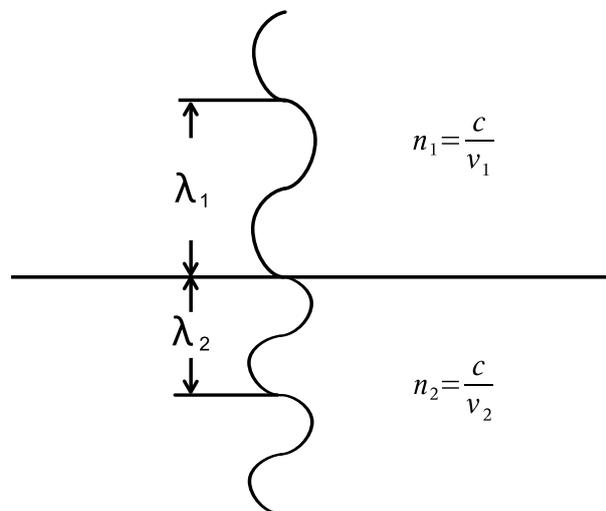


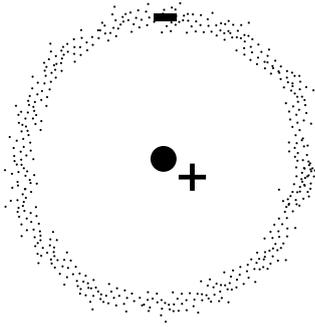
Übergang in ein anderes Medium

$$f_2 = f_1$$

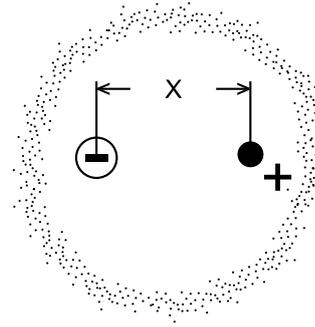
$$V_2 = V_1 \frac{n_1}{n_2}$$

mit $v = \lambda f$ folgt $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{n_1}{n_2}$





Ohne Licht: Ladungsschwerpunkt übereinstimmend



Mit Lichteinstrahlung (EM-Welle):
getrennt Ladungsschwerpunkte

Durch Trennung der Ladungsschwerpunkte \Rightarrow Bildung eines Elektrischen Dipoles \Rightarrow Polarisation

$$P = z e x \frac{N}{V}$$

Dipoldichte

z – Ordnungszahl, ze – Ladung des Dipols, x – Größe des Dipols, $\frac{N}{V}$ – Dichte der Dipole

Analogie zur erzwungenen Schwingung:

Elektronenhülle – Atomkern $\hat{=}$ harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz ω_0

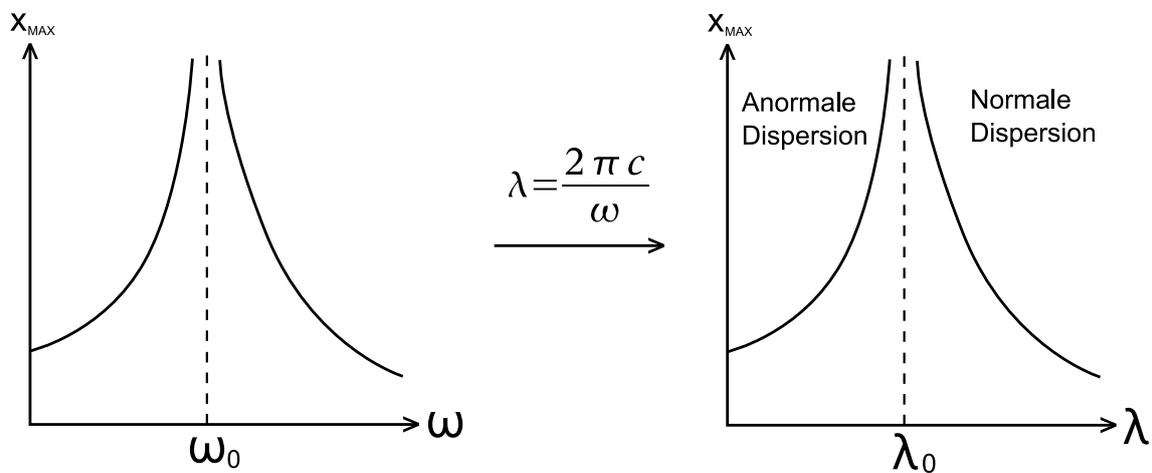
Licht als elektromagnetische Welle $\hat{=}$ externe Erregung mit Frequenz ω

\Rightarrow Amplitude der erzwungenen Schwingung ist von ω abhängig.

$$x_{\max} \sim P \approx \frac{ze^2 \cdot E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E$$

Für $\mu = 1$ gilt $n^2 = \varepsilon$

$$n^2 = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$



1.3 Fermat'sches Prinzip

Auch bezeichnet als: Satz vom ausgezeichneten Weg.

Für den Weg zwischen zwei festen Punkten nimmt das Licht denjenigen, für den die benötigte Zeit bzw. die sogenannte optische Weglänge $L = \int_A^B n(s) ds$ extremal sind.

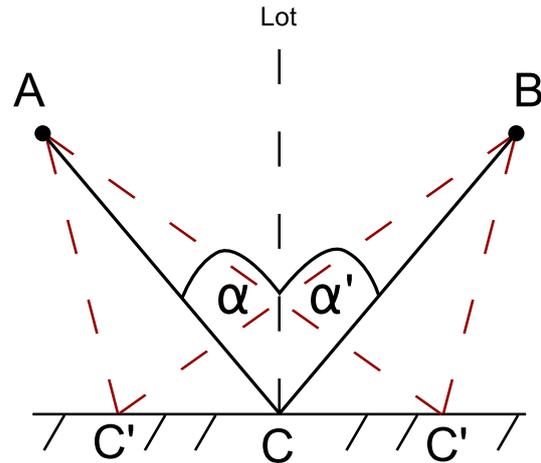
Viele optischen Experimente lassen sich mit dem Fermatschen Prinzip erklären:

Reflexionsgesetz im homogenen Medium

$$\overline{AC} + \overline{CB} < \text{alle anderen}$$

$$\Rightarrow t_{AC} + t_{CB} < \text{alle anderen}$$

$$\delta(\overline{AC} + \overline{CB}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \alpha'}$$



Brechungsgesetz

Konstanten: a, b, d

Variable: $x \Rightarrow S_1, S_2$

$$L = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2$$

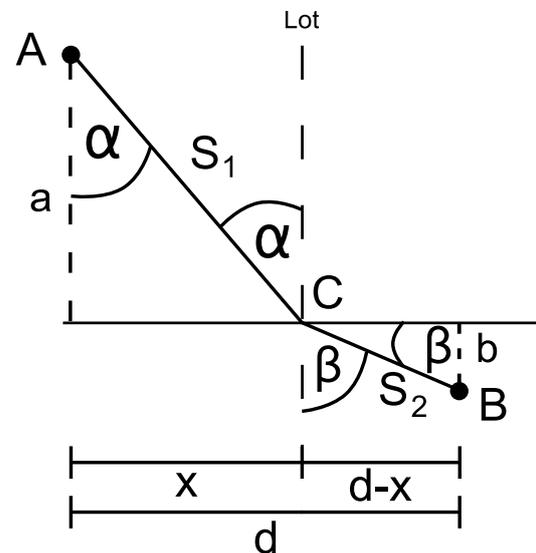
$$= n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$\delta L(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dx} \stackrel{!}{=} 0$$

$$= n_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + n_2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2(d-x)(-1)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

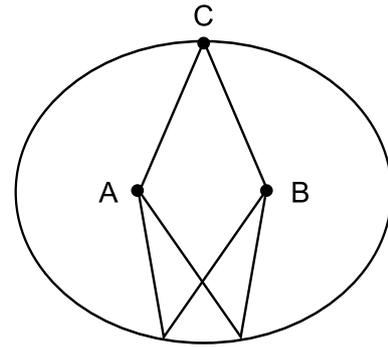
$$n_1 \frac{x}{S_1} = n_2 \frac{d-x}{S_2}$$



$$\boxed{n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \sin \beta}$$

Beispiel: für max. Zeit bzw. optische Weglänge

Durch die Geometrie der Ellipse sind alle Wege \overline{ACB} gleich lang.



Ellipse mit Brennpunkten A und B

Beispiel: optische Abbildung

Für alle Wege

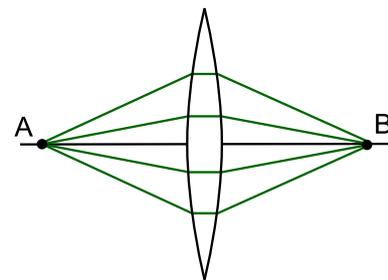
$$\int_A^B n(s) ds = \text{const.}$$

d.h. alle Wege legt das Licht in gleicher Zeit

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n(s) ds = \text{const.}$$

zurück.

Alle Lichtwellen treffen ohne Gangunterschied in B ein (konstruktive Interferenz in B).



1.4 Polarisation von Licht

Licht = **transversale Welle**

Amplitudenvektor \vec{E}_0 stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \vec{k} (Wellenvektor)

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

1. Polarisiertes Licht:

Linear polarisiertes Licht: Amplitudenvektor \vec{E}_0 schwingt in einer festen Ebene

Polarisierungsrichtung: Die Richtung, in die \vec{E}_0 zeigt.

Beispiel: (linear polarisierte Welle in z-Richtung)

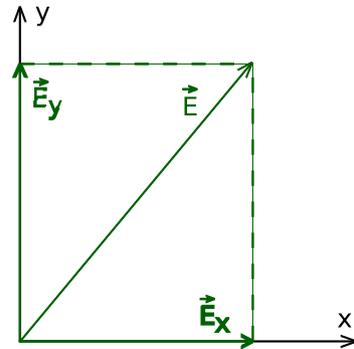
$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0(z) \cos(\vec{k}\vec{z} - \omega t)$$

$$\vec{k} = (0, 0, k) \quad \vec{E}_0 = (E_x, E_y, 0)$$

Zwei mögliche orthogonale Orientierungen von $\vec{E}_0 \Rightarrow$ Linearkombination der beiden Lösungen

Für eine effektive Lösung der Gleichungen betrachten wir die **komplexe Schreibweise:**

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ &= \vec{E}_{0x} e^{i(\omega t - kz)} + \vec{E}_{0y} e^{i(\omega t - kz)} \\ &= \vec{E}_x + \vec{E}_y \\ &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 (\cos(\omega t - kz) + i \sin(\omega t - kz)) \\ &\text{mit } \operatorname{Re} \vec{E} = \vec{E} \end{aligned}$$



Phasenverschiebung φ zwischen den beiden senkrecht zueinander polarisierten Wellen \vec{E}_x und \vec{E}_y

\Rightarrow **elliptisch polarisiertes Licht:**

(der Amplitudenvektor \vec{E}_0 beschreibt eine elliptische Schraubenlinie)

$$\text{Speziellfall: } |\vec{E}_{0x}| = |\vec{E}_{0y}| = \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

\Rightarrow **zirkular polarisiertes Licht:**

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_x &= \vec{E}_{0x} e^{i(\omega t - kz)} \\ \vec{E}_y &= \vec{E}_{0y} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \right\} \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)} \quad (\text{mit } e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$$

komplexer Amplitudenvektor:

$$\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (e_x + ie_y)$$

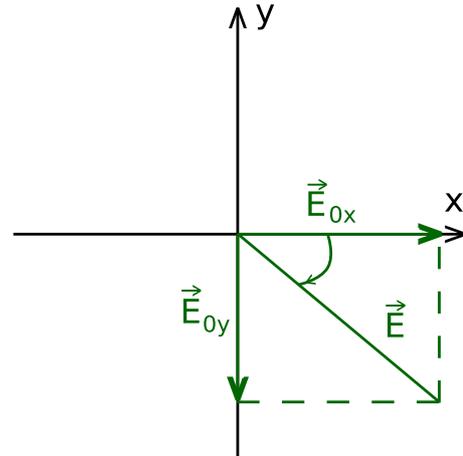
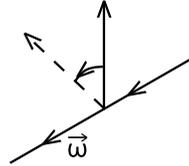
$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz) - E_{0y} \sin(\omega t - kz)$$

$z = 0$: \vec{E} -Vektor dreht sich im Uhrzeigersinn
 → **rechts zirkular** polarisierte Welle

$$\vec{E}_{0x} = E_{0x} \cos \omega t$$

$$\vec{E}_{0y} = -E_{0y} \sin \omega t$$

Vereinbarung unter Optikern:
 rechtszirkular $\hat{=}$ entgegengesetzt der allgemeinen Drehimpulsrichtung



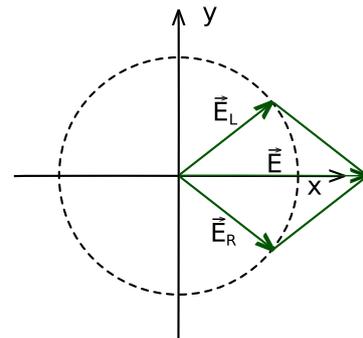
Siehe hierzu auch: Berkeley Physikkurs (2. Auflage) – Kapitel 8

Für eine links zirkular polarisierte Welle folgt analog:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y)e^{i(\omega t - kz)}$$

Durch Überlagerung von gleichstarken links und rechts zirkular polarisierten Wellen entsteht linear polarisiertes Licht.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_r + \vec{E}_l \\ &= (\vec{E}_{0x} + i\vec{E}_{0y})e^{i(\omega t - kz)} \\ &+ (\vec{E}_{0x} - i\vec{E}_{0y})e^{i(\omega t - kz)} \\ &= 2\vec{E}_{0x}e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$



2. Unpolarisiertes Licht: Amplitudenvektor ändert statistisch seine Richtung. Solches Licht lässt sich in zwei zueinander senkrechten Wellen zerlegen.

Beispiel: Eine Glühbirne besteht aus statistisch verteilten Hertz'schen Dipolen.

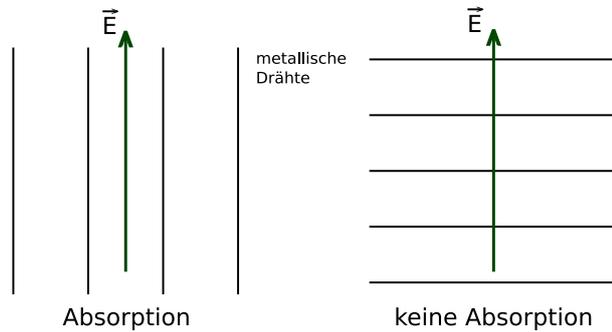
Polarisation durch Absorption

Drähte parallel zu \vec{E}

⇒ Elektronen im Draht werden zu Schwingungen angeregt

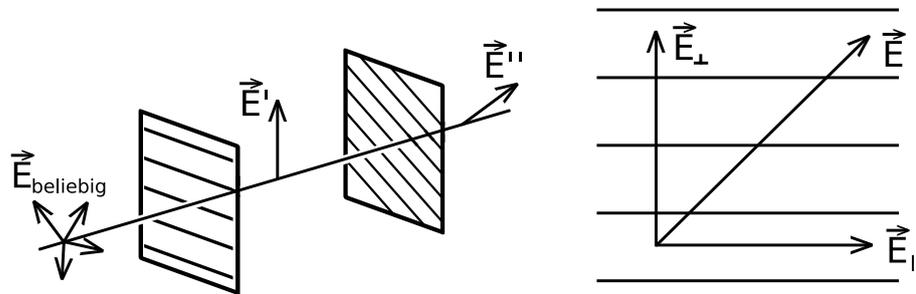
⇒ Energie geht in Draht über

Abstand der Drähte $\ll \lambda$, sonst Beugungseffekte



Wie sieht so ein Polarisator aus?

\vec{E}_\perp steht in Durchlassrichtung des Polarisators.



Intensität einer EM-Welle:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$S = c \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = I = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}$$

$$\Rightarrow \langle I \rangle \equiv I = \frac{1}{2} c \cdot \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Intensität nach Polarisation:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Gesetz von Malus

Polaroidfolie: 1938 von Edwin Lenz

1.4.1 Polarisierung durch Lichtstreuung

Streuung an Teilchen:

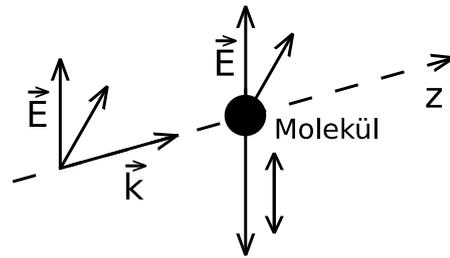
z.B. kleine Wassertröpfchen, Moleküle wie O_2 oder N_2

Bedingung:

Durchmesser der Teilchen \ll Lichtwellenlänge

Ursache: Molekül kann nur in eine Richtung schwingen.

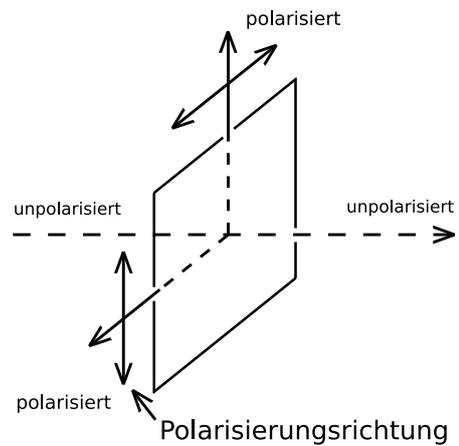
In Skizze: Schwingung nur nach nach oben und unten.



Streuintensität $\sim \omega^4 \cos^2 \Theta$ (Rayleigh-Streuung)

Θ – Beobachtungswinkel

Erklärung für blauen Himmel: Blau wird stärker gestreut als Rot.



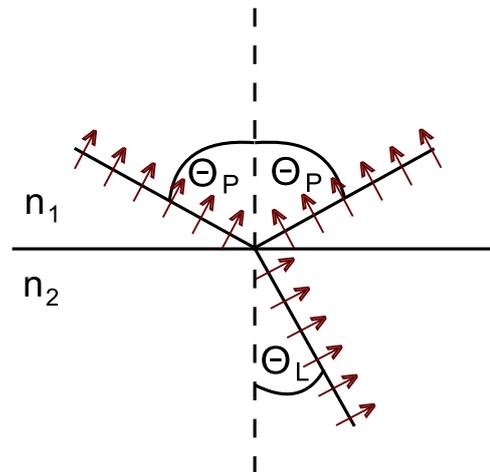
1.4.2 Polarisierung durch Reflexion

Bedingung: Winkel zwischen reflektierter und gebrochener Welle beträgt 90°

$\Rightarrow \Theta_P + \Theta_L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ vollständig linear polarisiert

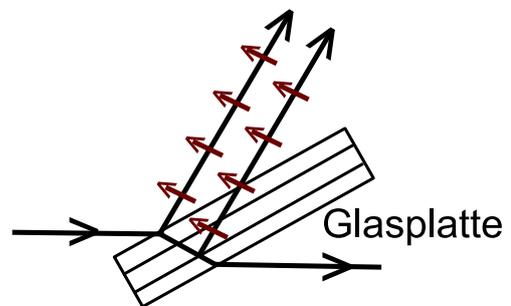
$$\begin{aligned} n_1 \sin \Theta_P &= n_2 \sin \Theta_L \\ &= n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Theta_P \right) \\ &= n_2 \cos \Theta_P \end{aligned}$$

$$\tan \Theta_P = \frac{n_2}{n_1}$$



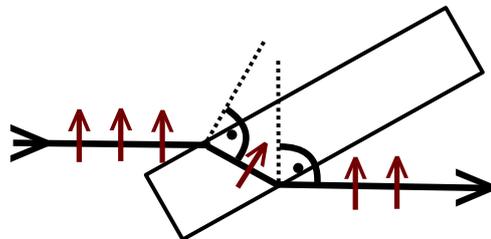
Θ_P – Brewster-Winkel
(z.B. Wasser $\Theta_P = 53^\circ$)

Sehr viele Selektionen von polarisiertem Licht: nur Licht der anderen Polarisation verbleibt.

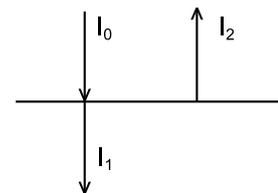


Brewster-Fenster:

- Bereits polarisiertes Licht trifft auf zwei Grenzschichten unter Brewster-Winkel
- Verlustfreies Passieren des Fenster
- Verwendung zum Beispiel in Lasern



normales Glas	Brewster-Fenster
$\frac{I_2}{I_0} \approx 0,03$	$\frac{I_2}{I_0} = 0$
$\frac{I_1}{I_0} \approx 0,97$	$\frac{I_2}{I_0} = 1$



1.4.3 Polarisation durch Doppelbrechung

Wir betrachten jetzt den Brechungsindex in Komponenten: $n \rightarrow n_1, n_2, n_3$

Bisher: kubische Kristalle

Jetzt: nichtkubische Kristalle (z.B. Kalkspat, Calcit $CaCO_3$) \Rightarrow Brechungsindex wird anisotrop!

Optische einachsige Kristalle

(z.B. Kalkspat)

z -Achse $\hat{=}$ optische Achse

Da $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$ kann \vec{E} nur \vec{E}_x oder \vec{E}_y sein.

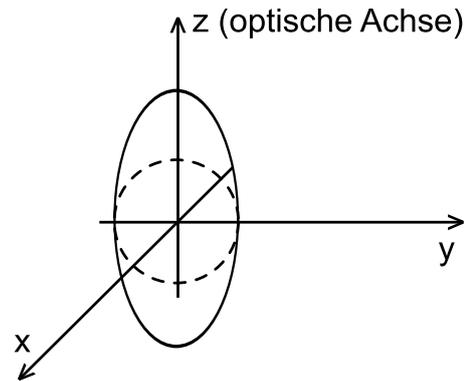
$$c_o = \frac{c}{n_o}$$

Was ist bei $\vec{k} \perp \vec{e}_z$?

Es resultieren zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten:

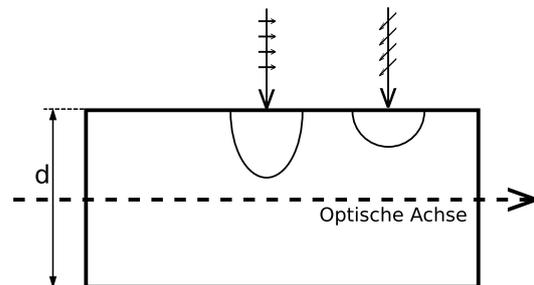
$$\vec{E}_z \parallel \vec{e}_z \Rightarrow c_{ao} = \frac{c}{n_{ao}}$$

$$\vec{E}_x \perp \vec{e}_z \Rightarrow c_o = \frac{c}{n_o}$$



Unterschiedliche Bewegungsgeschwindigkeiten der Wellen rufen einen Gangunterschied hervor:

$$\Delta = \frac{d}{\lambda_o} - \frac{d}{\lambda_{ao}} = \frac{d}{\lambda_{\text{Vakuum}}} (n_o - n_{ao})$$



Betrachte die Phasenverschiebung zwischen außerordentlichen und ordentlichen Strahl.

Einfallender Strahl:

$$E_x = E_0 \sin \omega t \quad E_y = E_0 \sin \omega t$$

o Austretender Strahl für Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{4}$:

$$E_x = E_0 \sin \omega t \quad E_y = E_0 \sin(\omega t + 90^\circ) = E_0 \cos \omega t$$

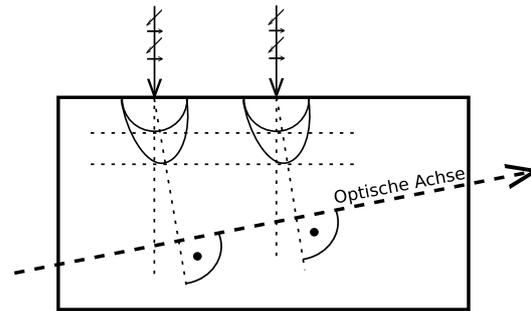
\Rightarrow zirkular polarisiertes Licht

o Austretender Strahl für Phasenverschiebung $\pi \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2}$:

$$E_x = E_0 \sin \omega t \quad E_y = E_0 \sin(\omega t + 180^\circ) = -E_0 \sin \omega t$$

\Rightarrow wiederum linear polarisiert

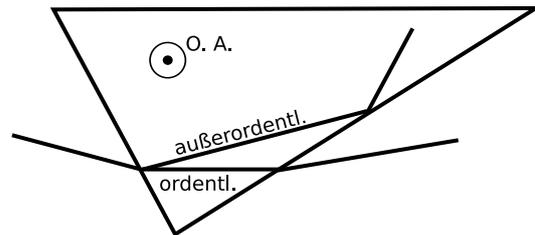
$c_{ao} > c_o$ – einachsiger negativer Kristall (Kalkspat)
 $c_{ao} < c_o$ – einachsiger positiver Kristall (Quarz)



Nicol-Prisma

optische Achse \perp Ebene des Strahlengangs

Der außerordentliche Strahl wird an der zweiten Grenze totalreflektiert. Ordentlicher und außerordentlicher Strahl wird getrennt.



1.4.4 Beschreibung der Polarisierung durch Jones-Vektoren und -Matrizen

Im folgenden sei:

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 + i\vec{e}_y E'_0$$

Komplex ausgedrückt:

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

Für E_0 gilt dann allgemein:

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_y E_{0y}$$

mit:

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\Phi_x} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}| e^{i\Phi_y}$$

Wir führen nun die vereinfachte Schreibweise ein um die Polarisierung der Welle zu beschreiben:

$$\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_{0x}| e^{i\Phi_x} \\ |E_{0y}| e^{i\Phi_y} \end{bmatrix}$$

Jones-Vektoren

Hier einige spezielle Fälle:

$\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$	=	$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	linear polarisierte Welle in x -Richtung
$\begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$	=	$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	linear polarisierte Welle in y -Richtung
$\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$	=	$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	linear polarisierte Welle 45° zu x -Richtung
$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$			links zirkular polarisierte Welle
$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$			rechts zirkular polarisierte Welle

Damit lässt sich jetzt ganz einfach rechnen. Zum Beispiel eine links und eine rechts polarisierte Welle addieren:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇒ linear polarisiert in x -Richtung

Jones-Matrizen

einfallendes Licht $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

ausfallendes Licht $\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$

Jones-Matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Für das Rechnen folgt nun:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$$

Einige Beispiele für Jones-Matrizen:

1. linear polarisiert:

$$\begin{array}{ll} \text{Polarisationsebene horizontal} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Polarisationsebene vertikal} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Polarisationsebene } \pm 45^\circ & \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. $\frac{\lambda}{2}$ -Platte:

$$\begin{array}{ll} \text{schnelle Achse vertikal} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ \text{schnelle Achse horizontal} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ \pm 45^\circ & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. zirkular polarisiert:

$$\begin{array}{ll} \text{rechts} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\ \text{links} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Beispiel: $\frac{\lambda}{4}$ Plättchen unter 45° zur x -Achse. Der einfallende Lichtvektor ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Das $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen hat die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. Die austretende Welle ergibt sich aus der Multiplikation:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

⇒ rechts zirkular polarisiertes Licht

1.5 Fresnel'sche Formeln

$F_{...}$ – Flächeninhalte

$$S_e \cdot F_1 = S_r \cdot F_2 + S_g \cdot F_3$$

$$F_1 = F_2$$

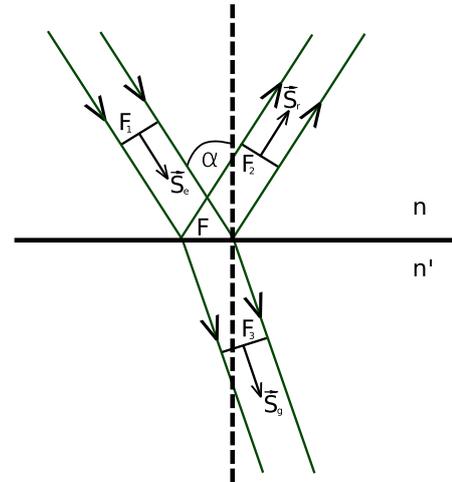
$$\frac{F_1}{F_2} = \cos \alpha \quad \frac{F_3}{F} = \cos \beta$$

$$\boxed{(S_e - S_r) \cdot \cos \alpha = S_g \cos \beta}$$

Energiesatz

S-polarisiertes Licht: senkrecht zur Einfallsebene (TE)

P-polarisiertes Licht: parallel zur Einfallsebene: (TM)



(a) Licht mit S-Polarisation (\perp, s)

$$S = I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E^2 = \frac{1}{2} n \varepsilon_0 c E^2$$

Mit Energiesatz:

$$\frac{n \cdot \varepsilon_0 \cdot c}{2} (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = \frac{n'}{2} \varepsilon_0 \cdot c E_g^2 \cos \beta$$

Tangentialkomponente des E -Vektors (parallel zur Oberfläche) ist *stetig*.

Da E_e, E_r, E_g parallel zur Oberfläche sind folgt:

$$\boxed{E_e - E_r = E_g}$$

Mit der Binomischen Formel: $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

$$n(E_e + E_r) \cdot \cos \alpha = n' E_g \cdot \cos \beta$$

$$\boxed{\frac{n'}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}$$

Brechungsgesetz

$$(E_e + E_r) \cos \alpha \sin \beta = E_g \sin \alpha \cos \beta$$

$$E_e - E_r = E_g$$

$$E_r = E_e \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta}$$

$$E_r = -E_e \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$E_g = E_e \cdot 2 \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

- $\alpha > \beta$: optisch dünnes \rightarrow optisch dichtes Medium
 E_r ist um 180° phasenverschoben
- $\alpha < \beta$: optisch dichtes \rightarrow optisch dünnes Medium
 E_r ist mit E_e in Phase
- Näherungsweise senkrechter Einfall (d.h. $\alpha \approx 0$)

$$E_r = -E_e \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

$$E_r = -E_e \frac{n' - n}{n' + n}$$

Übergang von E zur Intensität:

$$I = n \frac{\varepsilon_0 c}{2} E^2 \quad \text{also } I \sim n E^2$$

$$I_r^\perp = I_e \frac{(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta)^2}{(\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta)^2}$$

$$I_r^\perp = I_e \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

$$I_g^\perp = \frac{n'}{n} I_e \frac{4 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

Intensität bei S -Polarisation

\vec{E} senkrecht zur Einfallsebene

\vec{H} in der Einfallsebene

transversal elektrische Polarisation

(b) Licht mit P-Polarisation

Stetigkeit der Parallelkomponenten von \vec{E} (Tangentialkomponenten)

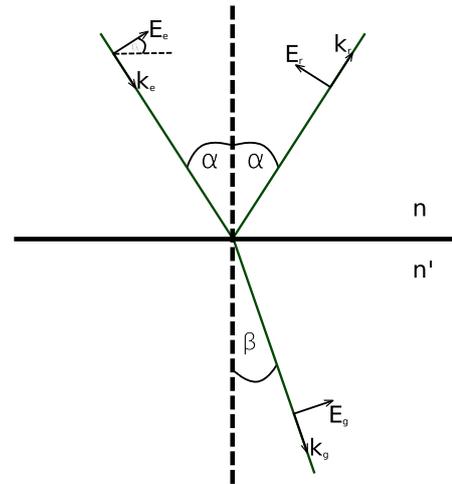
$$(E_e + E_r) \cos \alpha = E_g \cdot \sin \beta \quad (*)$$

Energieerhaltung:

$$n(E_e^2 - E_r^2) \cdot \cos \alpha = n' E_g^2 \cdot \cos \beta$$

Division durch (*)

$$n(E_e - E_r) = n' E_g = n \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} E_g$$



$$E_e \sin \beta = E_r \cdot \sin \beta + E_g \cdot \sin \alpha \quad | \cdot \cos \alpha$$

(*) umschreiben

$$E_e \cos \alpha = -E_r \cos \alpha + E_g \cos \beta \quad | \cdot \sin \beta$$

Beide addieren:

$$E_e (\sin \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cos \alpha) = E_g (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta)$$

$$E_e (2 \sin \beta \cos \alpha) = E_g (\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta))$$

$$E_e (\sin \beta \cos \beta - \cos \alpha \sin \alpha) = E_r (\sin \beta \cos \beta + \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$E_e (\sin(\beta - \alpha) \cos(\beta + \alpha)) = E_r (\sin(\beta + \alpha) \cos(\beta - \alpha))$$

$$E_r^{\parallel} = -E_e^{\parallel} \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

$$E_g^{\parallel} = -E_e^{\parallel} \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$

$E_r^{\parallel} \rightarrow 0$ für $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, wegen Divergenz des Nenners \Rightarrow Brewster-Winkel: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$\Rightarrow E_r(\alpha = \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$I_r^{\parallel} = I_e \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)}$$

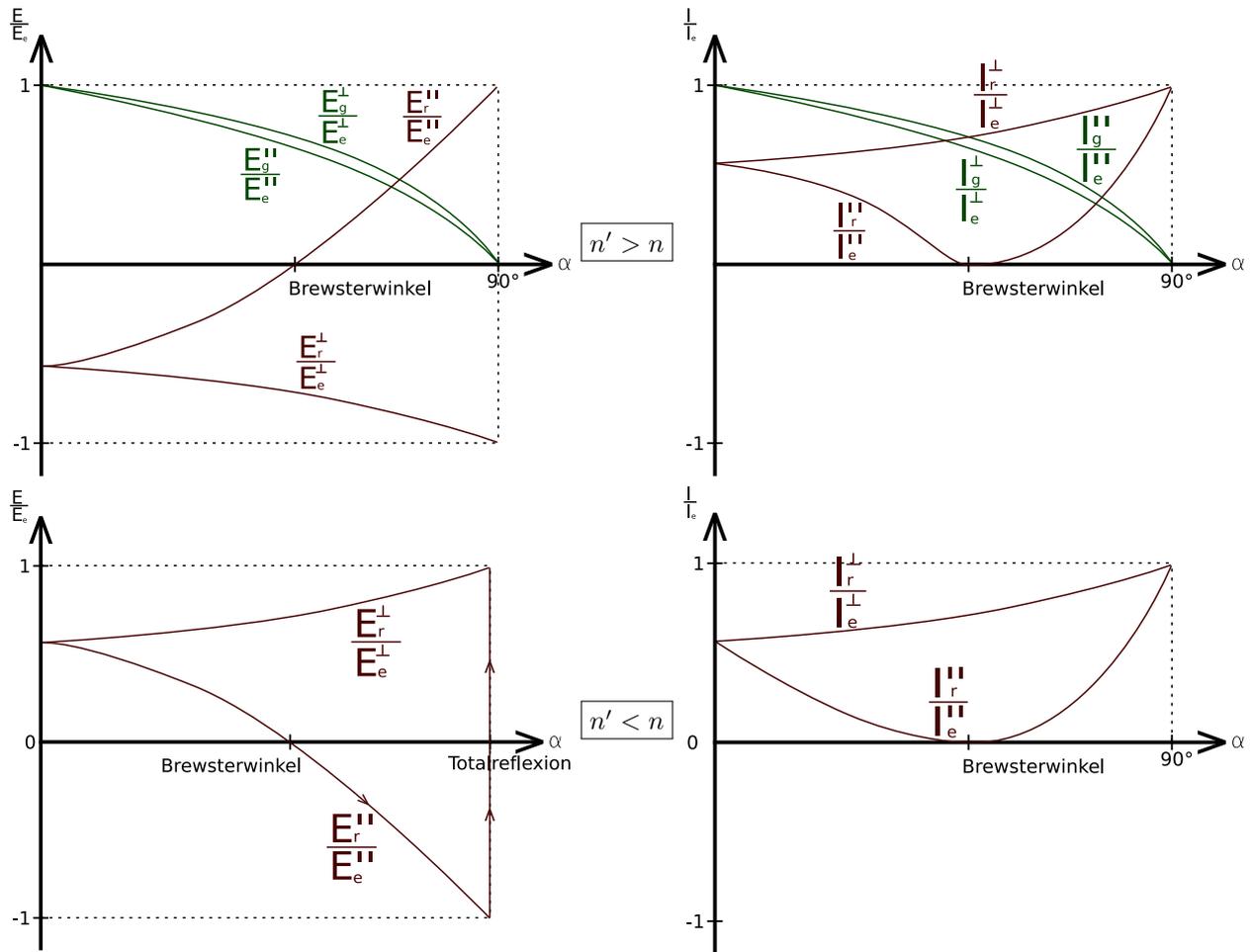
$$I_g^{\parallel} = I_e \frac{n'}{n} \frac{4 \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta) \cos^2(\alpha - \beta)}$$

\Rightarrow Intensität der P-Polarisation

\vec{E} -Vektor in der Einfallsebene

\vec{H} -Vektor senkrecht zur Einfallsebene

transversal magnetische Polarisation



$\alpha = 0$ Einfallswinkel nicht mehr definiert:

$$\frac{I_r}{I_e} = R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{4nn'}{n' + n} \right)^2$$

$$\frac{I_g}{I_e} = T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n'n}{(n' + n)^2}$$

Allgemein gilt:

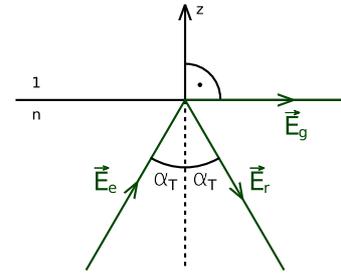
$$1 = T + R$$

Alternative Formulierung des Energiesatzes

Senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$$

$$n \cdot \sin \alpha_T = 1$$



mit α_T : Winkel der Totalreflexion

Was passiert bei $\alpha > \alpha_T$?

$$E_e = E_{e0} \cdot e^{i(\omega t - k_0 n(x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha))}$$

$$E_r = E_{r0} \cdot e^{i(\omega t - k_0 n(x \sin \alpha - z \cos \alpha))}$$

$$E_g = E_{g0} \cdot e^{i(\omega t - k_0(x \sin \beta + z \cdot \cos \beta))}$$

$$\sin \beta = n \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \pm i \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 \alpha - 1}$$

$$\Rightarrow E_g = E_{g0} \underbrace{e^{i(\omega t - k_0 x n \sin \alpha)}}_{\text{periodisches Glied}} \cdot \underbrace{e^{-k_0 z \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 \alpha - 1}}}_{\text{Dmpfungsglied in } z\text{-Richtung}}$$

Das Dämpfungsglied darf maximal bis e^{-1} abfallen. Es resultiert eine Eindringtiefe:

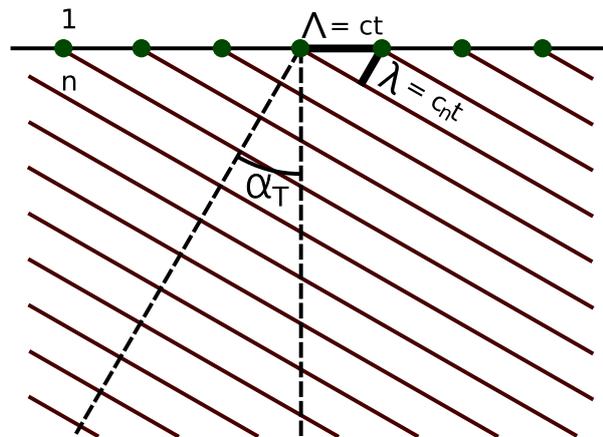
$$e^{-1} \Rightarrow \omega = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n^2 \cdot \sin^2 \alpha - 1}} \approx \lambda$$

An den grünen Punkte kann es durch Überlagerung von E_e und E_g zu einer stehenden Wellen kommen. Nach dem Huygenschen Prinzip gilt:

$$\sin \beta = \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{\lambda_0}{n \cdot \Lambda}$$

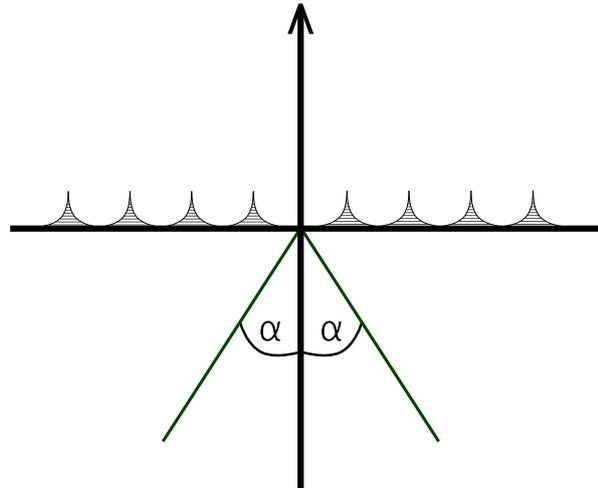
$$\Lambda = \frac{\lambda_0}{n \cdot \sin \alpha_T}$$

Λ - resultierende Wellenlänge im n -Medium



Evaneszierende Welle

Ist die Dicke der oberen Schicht kleiner als die Eindringtiefe, so kann das Licht einen Teil durch das Material durchgehen. \Rightarrow **Tunneleffekt**



2 Wellen und Wellenpakete

2.1 Fourieranalyse periodischer Schwingungen

2.1.1 Fourieranalyse periodischer Schwingungen

Eine Funktion $y = y(t)$ heißt **periodisch**, wenn $y(t+T) = y(t)$ gilt. T heißt **Periode**, die **Frequenz** ist $\nu = 1/T$ und $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ heißt **Kreisfrequenz**.

Eine harmonische Funktion lässt sich durch Kosinus- und Sinusfunktionen beschreiben:

$$y = y_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

In komplexer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \tilde{y}_0 \cdot e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \tilde{y}_0 = y_0 \cdot e^{i\alpha} \\ y &= \operatorname{Re} \tilde{y} = \operatorname{Re} \left(y_0 \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} \right) = y_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Fourier 1822: Jede periodische Funktion der Periode $T = 2\pi/\omega$ lässt sich in eine unendliche Reihe harmonischer Funktionen entwickeln.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_n \cdot e^{in\omega t} \\ \text{mit den Fourierkoeffizienten} \\ \tilde{g}_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} \tilde{y}(t) \cdot e^{-in\omega t} dt \end{aligned}$$

Komplexe Fourieranalyse

Betrachte die Fourieranalyse im Reellen:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Re} \tilde{y} \\ y &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\operatorname{Re} \tilde{g}_n \cdot \cos(n\omega t) + \operatorname{Im} \tilde{g}_n \cdot \sin(n\omega t) \right] \\ y &= \operatorname{Re} \tilde{g}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} \tilde{g}_n + \operatorname{Re} \tilde{g}_{-n} \right) \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Im} \tilde{g}_n + \operatorname{Im} \tilde{g}_{-n} \right) \cdot \sin(n\omega t) \end{aligned}$$

Hierbei ist $a_0/2 = \operatorname{Re} \tilde{g}_0$. Die Klammerterme ergeben sich zu

$$\begin{aligned} a_n &= \operatorname{Re} (\tilde{g}_n + \tilde{g}_{-n}) \\ a_n &= \frac{1}{T} \cdot \operatorname{Re} \int \tilde{y} [e^{-in\omega t} + e^{in\omega t}] dt \\ a_n &= \frac{1}{T} \cdot \int \operatorname{Re} \tilde{y} \cdot 2 \cos(n\omega t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t) \right] \\ \text{mit } a_n &= \frac{2}{T} \int y \cdot \cos(n\omega t) dt \\ \text{und } b_n &= \frac{2}{T} \int y \cdot \sin(n\omega t) dt \end{aligned}$$

Reelle Fourieranalyse

Beispiel: Sägezahnfunktion

Für $t \in [-T/2, T/2]$ ist $y(t) = A \cdot t/T$. Die Kreisfrequenz ist $\omega = 2\pi/T$.

$$\begin{aligned}\tilde{g}_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-in \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} dt \\ &\quad (\text{Substitution } h = t/T, \lambda = -in \cdot 2\pi) \\ \tilde{g}_n &= A \cdot \int_{-1/2}^{1/2} h \cdot e^{\lambda h} dh \\ \tilde{g}_n &= A \cdot \left[\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot e^{\lambda h} \right]_{-1/2}^{1/2} \\ \tilde{g}_n &= A \cdot \left[\left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot e^{\lambda/2} - \left(-\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot e^{-\lambda/2} \right] \\ \tilde{g}_n &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left[e^{\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}} \right] - \frac{A}{\pi^2} \cdot \left[e^{\frac{\lambda}{2}} - e^{-\frac{\lambda}{2}} \right] \\ \tilde{g}_n &= \frac{A}{4n\pi} \cdot 2 \cos(n\pi) - \frac{A}{-4n^2\pi^2} \cdot \underbrace{2i \sin(n\pi)}_{=0} \\ \tilde{g}_n &= \frac{iA}{2n\pi} (-1)^n\end{aligned}$$

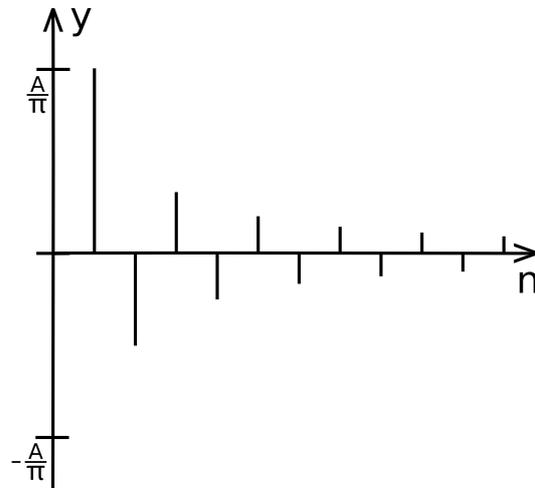
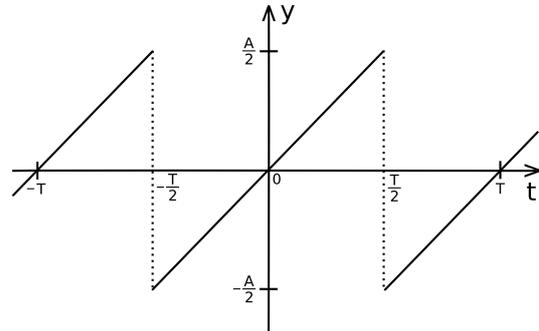
Im Reellen ist

$$a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

Somit folgt

$$y(t) = \frac{A}{\pi} \cdot \left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega t) + \dots \right]$$

$$y(t) = \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n\omega t)$$

**Beispiel: Rechteckfunktion**

$$y(t) = \begin{cases} A & \text{für } -\frac{B}{2} \leq t \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{B}{2} < t < T - \frac{B}{2} \end{cases}$$

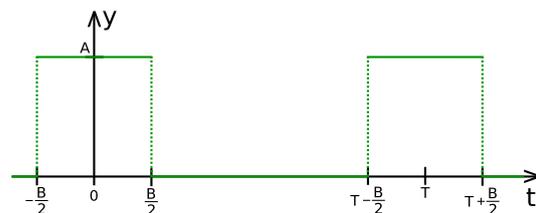
Für $n \neq 0$:

$$\tilde{g}_n = \frac{1}{T} \int_{-B/2}^{B/2} A \cdot e^{-in \cdot 2\pi \frac{t}{T}} dt$$

$$\tilde{g}_n = -\frac{A}{in \cdot 2\pi} \left[e^{-in \cdot 2\pi \frac{t}{T}} \right]_{-B/2}^{B/2}$$

$$\tilde{g}_n = \frac{A}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot B}{T}\right)$$

Spektrum (oben) und Frequenzspektrum der Sägezahnfunktion



Nun geht man von einer unendlichen Summe zu einem Integral von Sinus- und Kosinusfunktionen über und kann so alle Funktionen fouriertransformieren.

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \\ \tilde{g}_n &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt\end{aligned}$$

Fourieranalyse für aperiodische Funktionen

Beispiel: Wellenpaket

$$y(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(\Omega t) & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen Symmetrie ist $b(\omega) = 0$ und

$$a(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \Omega t \cdot \cos \omega t \, dt$$

$$a(t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\cos[(\omega - \Omega)t] + \cos[(\omega + \Omega)t] \right]$$

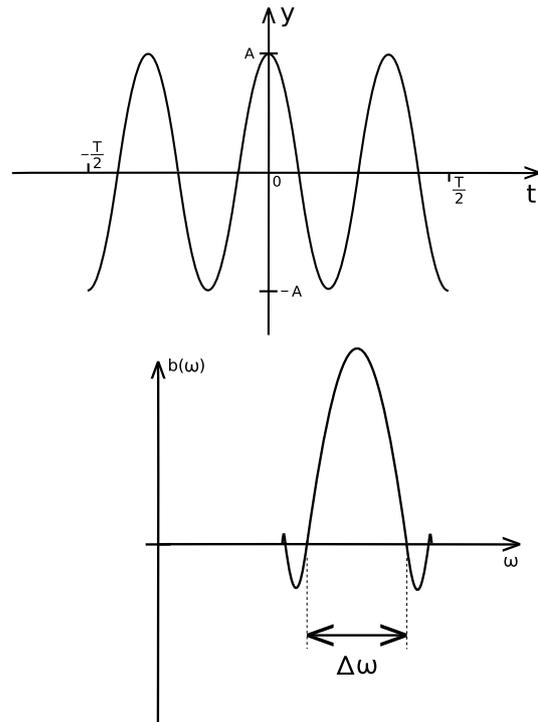
$$a(t) = \frac{A}{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin[(\omega - \Omega)t]}{\omega - \Omega} + \frac{\sin[(\omega + \Omega)t]}{\omega + \Omega} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$a(t) = \frac{A}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin[(\omega - \Omega)\frac{T}{2}]}{\omega - \Omega} + \frac{\sin[(\omega + \Omega)\frac{T}{2}]}{\omega + \Omega} \right]$$

Aus der Skizze erkennt man:

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{T} \Rightarrow \Delta\omega \cdot T = \text{const.}$$

Aus dieser Relation, die für alle Wellenpakete gilt, folgt in der Quantenmechanik die Heisenberg'sche Unschärferelation.



Spektrum und Frequenzspektrum eines Wellenpakets

Eine Welle ist die räumliche Ausbreitung einer periodischen Schwingung. Breitet sich eine aperiodische Schwingung im Raum aus, spricht man von einem **Wellenpaket**.

Wiederholung

Beispiel:

Rechteckfunktion:

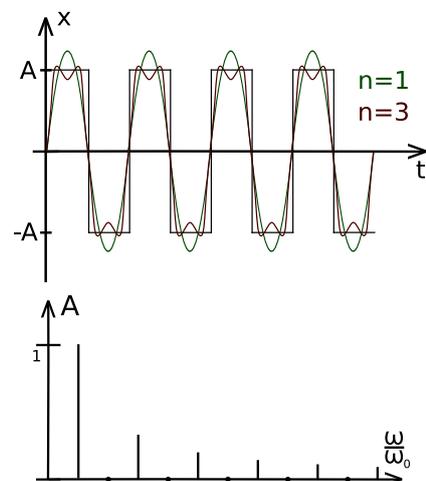
$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < \omega t < \pi \\ -A & \pi < \omega t < 2\pi \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right)$$

Auftragung der Fourierkoeffizienten zu einzelnen Peaks:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Spektraldarstellung (Spektrum)



Spektrum und Frequenzspektrum einer Rechteckfunktion

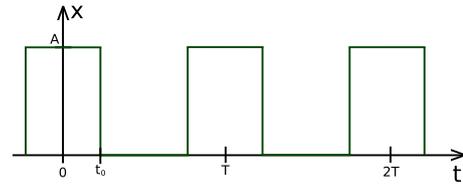
Optische Spektrometer: (Gitter- Prismenspektrometer)
 $I \sim A^2$

Fourieranalyse eines nichtperiodischen Vorgangs

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = \frac{2 \cdot t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin n\omega_0 t}{\pi \cdot n} \cos n\omega_0 t$$

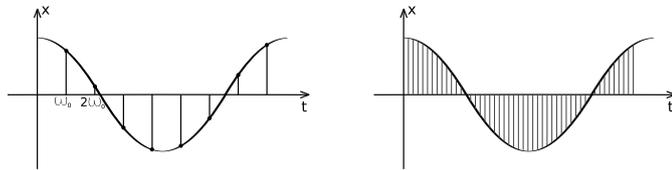


Sei $\frac{t_0}{T} = \frac{1}{b}$

$$T \rightarrow \infty$$

$$x(t) = \int_{\frac{b}{\omega}}^{\infty} \frac{2 \sin \omega t_0}{\pi \omega} \cos \omega t \, d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega t_0}{\omega}$$



Übergang zum kontinuierlichen Frequenzspektrum

2.2 Wellen in einer Raumdimension

Welle ist die räumliche Ausbreitung einer periodischen Schwingung.

Wellenpaket ist die räumliche Ausbreitung einer nichtperiodischen Schwingung.

Schwingung: $a(t) \rightarrow$ Welle $a(t - \frac{x}{v})$

$A = A(x, t) = a(x - vt)$ – nach rechts laufende Welle

a – Phasenfunktion, v – Phasengeschwindigkeit $\varphi = x - vt$ Phase

$A = a(x + vt)$ – nach links laufende Welle

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}$$

Wellengleichung

\Rightarrow lineare Differentialgleichung (es gilt das Superpositionsprinzip)

Jede Funktion, die diese Gleichung erfüllt ist eine **Welle**

$$A_1(x, t) + A_2(x, t) = A(x, t)$$

Schwingungsdauer T bei festem x , Wellenlänge Λ bei festem t

$$v = \frac{\Lambda}{T}$$

Durch Überlagerung: $A(x, t) = a(x - vt) + a(x + vt)$ – stehende Welle

2.3 Welle in drei Raumdimensionen

Für Kartesische Koordinaten: $A = A(x, y, z)$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \Delta A$$

Kugelwellen:

$$A(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{1}{r} a(r - vt)$$

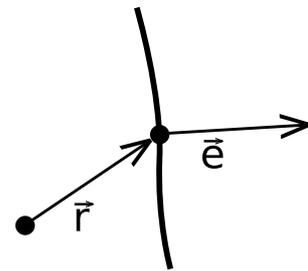
$$\Delta A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right)$$

allgemeinste dreidimensionale Welle:

$$A(\vec{r}, t) = a(\vec{e} \cdot \vec{r} - vt) \quad \vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{ Kugelwelle}$$

\vec{e} : Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung

\vec{r} : Ortsvektor



Ausbreitungsrichtung einer Welle

2.4 Harmonische Welle und Fourieranalyse

harmonische Welle: $a(r - vt)$ nur sin und cos Termen.

bei fester Zeit: $a \sim e^{ikx}$

λ : Wellenlänge

\vec{k} : Wellenzahlvektor mit $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}$

$$\Phi = k(\vec{e} \cdot \vec{r} - vt) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

Ebene harmonische Welle: $E(x, y, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

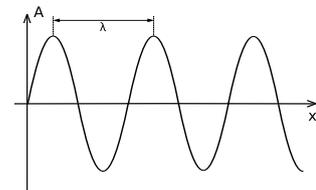
harmonische Kugelwelle: $K(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$

$$E(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_n e^{in(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$nk = k_n = n \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$g_n = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} E(x, y, z, t) e^{-in(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dx$$

Gilt nur, wenn $v = \text{const.}$, d.h. wenn die Geschwindigkeit nicht von der Wellenlänge abhängt.



2.5 Dispersionsbehaftete Wellen

Wir betrachten jetzt Wellen mit $v = v(\lambda)$

Lichtwellen: $v(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)}$

Wasserwellen $v = v(\lambda, \rho, \sigma, \dots)$

Harmonische periodische Schwingung \rightarrow harmonische Wellen

Harmonische aperiodische Schwingung \rightarrow aperiodische Welle (Wellenpaket)

Folgende Bedingung muss erfüllt sein:

$$v = \nu\lambda = \frac{\lambda}{T}$$

Überlagerung von Wellen mit Dispersion führt zu aperiodischen Wellen.

$$A(x, t) = \sum_{i=1}^m g_i \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_i} (x - v(\lambda_i)t) \right]$$

allgemeines Wellenpaket:

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ik(x-v(\lambda)t)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx-\omega t)} dk \end{aligned}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

mit $\omega = vk \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = v(\lambda)$

Jeff

$$A(x, t) = \underbrace{M(x, t)}_{\text{Einhüllende}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad \text{mit } M(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k-k_0)x - i(\omega-\omega_0)t} dk$$

Frequenz $\omega = \omega(k)$. Entwickeln um ω_0 und in $M(x, t)$ einsetzen:

$$\omega = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots \Rightarrow M(x, t) = \int \frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k-k_0)c - i(k-k_0)\frac{d\omega}{dk} \cdot t} dk$$

Die Einhüllende $M(x, t)$ ist jetzt eine Funktion $M(x - \frac{d\omega}{dk}t, t)$. Wie ist der Zusammenhang zwischen v_g und v_φ ?

Mit $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$ und $\omega = v_\varphi k$:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= v_\varphi + k \frac{dv_\varphi}{dk} = v_\varphi + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dv_\varphi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \end{aligned}$$

$$v_g(\lambda) = v_\varphi - \lambda \frac{dv_\varphi}{d\lambda}$$

3 Interferenz und Beugung

3.0.1 Superpositionsprinzip für Wellen

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein?

- Nur gleichartige Wellen können interferieren.
- Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle muss unabhängig von der Amplitude der Welle sein.
- Amplituden dürfen nicht zu groß sein. Im weiteren Sinne dürfen keine nichtlinearen Effekte auftreten (z.B. beim Laser).

Prinzip der Superposition von Wellen:

Die Wellen überlagern sich ohne gegenseitige Störung. Die Elongation der resultierenden Welle ist gleicher Summe aller Einzelelongationen.

Beispiel: Zwei ebene Wellen gleicher Amplitude, Frequenz und Wellenzahl und variabler Anfangsphase.

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

– An einem festen Ort ($x = \text{const.}$) in Phasendifferenz: $(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega \Delta t - \delta$

– zu fester Zeit ($t = \text{const.}$) in Phasendifferenz: $(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) = k \Delta x - \delta$

mit $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$y_{\text{res}}(x, t) = y_1 + y_2 = \underbrace{2A \cos \frac{\delta}{2}}_{=A_{\text{res}}} \cdot \sin \left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2} \right)$$

Für verschiedene Phasenverschiebungen

$$\delta = 0 \Rightarrow A_{\text{res}} = 2A \quad \text{konstruktive Interferenz}$$

$$\delta = \pi/2 \Rightarrow A_{\text{res}} = \sqrt{2}A$$

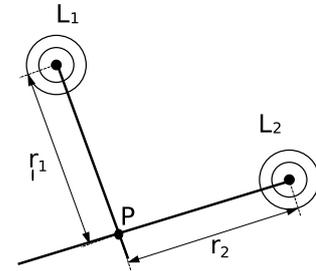
$$\delta = \pi \Rightarrow A_{\text{res}} = 0 \quad \text{destruktive Interferenz}$$

3.0.2 Interferenzerscheinungen bei Licht

gleiche lineare Polarisationsrichtung, im Vakuum

Beispiel: Zwei punktförmige Lichtquellen werden in einem Punkt P überlagert.

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} - \delta_1\right)\right) \\ E_2 &= A_2 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} - \delta_2\right)\right) \\ \Rightarrow E_{\text{res}}(P, t) &= E_1 + E_2 \end{aligned}$$



Messgröße, die der Detektor registrieren kann: Intensität I (zeitlicher Mittelwert der Energie pro Fläche und Zeit).

$$I = \overline{S^t}$$

$$S = \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 v = \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E^2 = nc \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{Z} E^2$$

dabei Z : Wellenwiderstand ($[Z] = 1\Omega$) Gesamtintensität in P :

$$I = \frac{1}{Z} \overline{(E_1 + E_2)^2}$$

Mit Additionstheorem $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2Z} \left[\overline{A_1^2 + A_1^2 \cos\left(4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} - \delta_1\right)\right)} + \overline{A_2^2 + A_2^2 \cos\left(4\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} - \delta_2\right)\right)} \right. \\ &\quad \left. + 2A_1 A_2 \cos\left(2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \delta_2 - \delta_1\right)\right) + 2A_1 A_2 \cos\left(2\pi\left(\frac{2t}{T} - \frac{r_2 - r_1}{\lambda} - \delta_2 - \delta_1\right)\right) \right] \end{aligned}$$

für $t \gg T \rightarrow I = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \delta_2 - \delta_1\right))$

mit $I_i = \frac{1}{2Z} A_i^2$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} + \delta_2 - \delta_1\right)$$

$$\text{falls } I_1 = I_2 \rightarrow \begin{cases} I = 4I_1 & \text{für } \varphi = 2n\pi \\ I = 0 & \text{für } \varphi = (2n+1)\pi \end{cases}$$

<http://www.falstad.com/ripple>

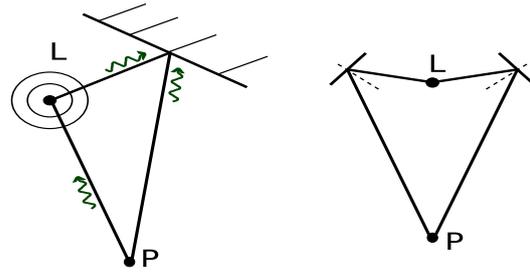
3.1 Phasendifferenz und Kohärenz

Voraussetzung für das Auftreten konstruktiver und destruktiver Interferenz sind kohärente Wellen. Das heißt die Phasendifferenz der Wellen muss konstant sein. Wellen mit veränderlicher Phasendifferenz nennt man inkohärent.

Licht wird durch Emission von Wellenzügen (Wellenpaketen) der Länge l erzeugt. Um Licht interferieren zu lassen muss man einen Wellenzug aufspalten.

Im linken Bild kann es zu keiner Interferenz kommen.

Im rechten Beispiel (mit zwei Spiegeln) kommt das Licht mit einer konstanten Phasenverschiebung an, das heißt, es kann interferieren.



Kohärenzlänge

ist die maximal zulässige Wegdifferenz ($\approx l$) für das Auftreten von Interferenz.

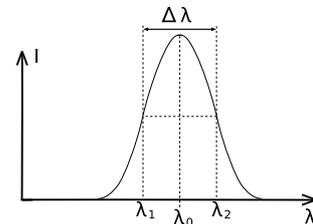
Kohärenzzeit ist die maximale Zeitdifferenz ($\tau \approx \frac{l}{c}$) für das Auftreten von Interferenz.

a

Im Wellenzug gibt es eine spektrale Verteilung mit unterschiedlichen Intensitäten.

Was ist bekannt?

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$$



Vereinfachung im Punkt P:

- $\delta_2 = \delta_1$
- Maximum für $\lambda_0 \Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{\lambda_0} = n$.
- Minimum für $\lambda_1 \Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{\lambda_1} = \frac{2n+1}{2}$

$$\Rightarrow l = r_2 - r_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{2(\lambda_0 - \lambda_1)} \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{l}{c} = \frac{1}{\Delta f}$$

Beispiele:

- $l_{\max} = 1 \text{ m} \Rightarrow \tau \approx 10^{-8} \text{ s}$
- Gewöhnlich: $\tau = 10^{-11} \dots 10^{-14} \text{ s} \Rightarrow l = 10^{-3} \dots 10^{-6} \text{ m}$

Ausgedehnte Lichtwelle:

Das Licht muss den Weg s zurücklegen, wobei gilt:

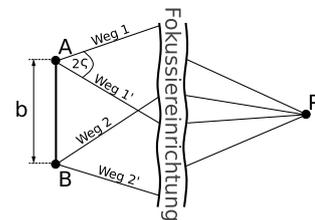
$$s_1 - s'_1 < l \text{ und } s_2 - s'_2 < l$$

$$\text{Also: } (s_1 - s'_1) - (s_2 - s'_2) \ll \lambda_0$$

$$\text{Umformen: } (s_1 - s_2) + (s'_2 - s'_1) \ll \lambda_0$$

$$2x = 2b \sin \sigma \ll \lambda_0$$

$$\Rightarrow \sin \sigma \approx \sigma \leq \frac{\lambda_0}{2b}$$



3.1.1 Stehende Welle

Superposition von entgegengesetzt laufenden Wellen.

$$E_1 = E \sin(\omega t + kx) \text{ und } E_2 = E \sin(\omega t - kx + \delta)$$

$$\Rightarrow E_{\text{res}} = 2E \cos\left(kx - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

Was sind die Knoten? Das sind alle Ort, für die gilt:

$$E = 0 \quad \forall t \quad \left(kx - \frac{\delta}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

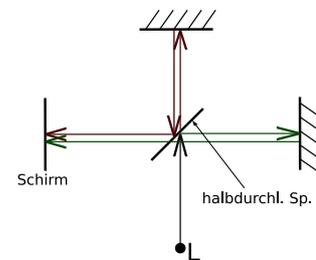
Wellenbäuche sind Orte, an denen die Amplitude maximal wird

$$E_{\text{res}} = 2E \text{ für } kx - \frac{\delta}{2} = n\pi$$

3.1.2 Das Michelson-Interferometer

Aufbau: Punktförmige Lichtquelle sendet Licht aus. Das Licht fällt auf einen halbdurchlässigen Spiegel. Ein Teil fällt auf einen zweiten Spiegel und wird dort reflektiert. Der andere Teil geht durch den ersten Spiegel und wird dahinter reflektiert. Man erkennt ein Interferenzmuster auf dem Schirm.

Für die Differenz der optischen Weglänge für die beiden Teilwellenzüge gilt: $\Delta L_{21} = n_1 s_1 - n_2 s_2$. Interferenz ist möglich, wenn ΔL_{21} kleiner l , und nicht möglich, wenn ΔL_{12} größer l .



3.1.3 Fabry-Perot-Interferometer

Monochromatisches Licht wird an einer Glasplatte teilweise gespiegelt. Auf den Schirmen sieht man ja einen Kreis. Beim durchgelassenen Strahl ist der Mittelpunkt hell. Beim reflektierten Strahl ist der Mittelpunkt dunkel.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Was passiert bei zwei einfallenden Strahlen?

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

erste Bedingung: $E_{0i} = tt'E_{0i} + rrE_{0i} = t(\alpha)t'(\beta) + r(\alpha)r(\alpha)E_{0i}$

zweite Bedingung: $0 = t(\alpha)r(\alpha)E_{0i} + r'(\beta)t(\alpha)E_{0i}$

$$\begin{aligned} t(\alpha)t'(\beta) &= 1 - r^2(\alpha) \\ r'(\beta) &= -r(\alpha) \end{aligned}$$

Stokes'sche Relation

Das Licht wird an beiden Grenzflächen reflektiert. Interessant ist die Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen.

Nach der Zeit t ist das Licht des ersten Strahles am Ort D . Zur gleichen Zeit ist der zweite Strahl am Ort C . Für die Differenz folgt:

$$\Delta = 2 \cdot n_{\text{Glas}} \cdot \overline{AB} - \overline{AD} = 2 \cdot n_{\text{Glas}} \cdot \overline{AB} - \overline{AC} \cdot \sin \alpha$$

mit $n_{\text{Glas}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta &= \overline{AB}(2 \cdot n_{\text{Glas}} - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta) \\ \Delta &= \frac{2\alpha}{\cos \beta} (n_{\text{Glas}} - \sin 2\beta \cdot n_{\text{Glas}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2dn_{\text{Glas}} \cos \beta}{\cos \beta} \\ &= 2d \sqrt{n_{\text{Glas}}^2 - \sin^2 \alpha} \\ \frac{\Delta}{\lambda} &= \frac{\delta}{2\pi} \end{aligned}$$

mit Phasenunterschied $\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$

Wenn das Licht im Glas wieder mehrmals reflektiert wird, so entstehen viele ausfallende Strahlen. Es gilt für die reflektierte Amplitude:

$$E_{0r} = r \cdot e_0 + (t'r'te_0 + t'r'^3tE_0 + t'r'^5te_0 + \dots)$$

Interessant ist: Wann erhalte ich Interferenz (positiv oder negativ)? Dazu muss gelten: $r = -r'$. Dann folgt für die Amplituden;

$$E_{0r} = E_0 [r - t'rt(1 + r^2 + r^4 + \dots)]$$

Wir benutzen die Lösung der geometrische Reihe mit: $r^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-r^2}$

$$E_{0r} = E_0 \left\{ r - \frac{t'rt}{1-r^2} \right\} = E_0 \cdot r \left\{ 1 - \underbrace{\frac{t't}{1-r^2}}_{=1} \right\}$$

Die reflektierte Amplitude ist also:

$$E_{0r} = 0 \quad \Delta = m \cdot \lambda = 2n_{\text{Glas}} \cdot d \cdot \cos \beta$$

$$d \cos \beta = \frac{m\lambda}{2n_{\text{Glas}}}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Alles transmittierte Licht wird durchgelassen, alles reflektierte Licht wird ausgelöscht. Der Wegunterschied zwischen den Strahlen ist $\Delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$.
Dann ist die reflektierte Amplitude:

$$\begin{aligned} E_{0r} &= r E_0 + r t' t E_0 - t' r^3 t E_0 + t' r^5 t E_0 - \dots \\ &= r E_0 \left\{ 1 + t' t \underbrace{(1 - r^2 + r^4 - \dots)}_{\frac{1}{1+r^2}} \right\} \\ &= E_0 r \left[1 + \frac{t' t}{1+r^2} \right] = E_0 r \left[1 + \frac{1-r^2}{1+r^2} \right] \\ \text{mit } t' t &= 1 - r^2 \\ &= \underline{\underline{E_0 r \left[\frac{2}{1+r^2} \right]}} \end{aligned}$$

Angewendet auf die Intensität:

$$I_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \frac{E_{0r}^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \cdot \frac{E_0^2}{2}$$

Effektiv kann man das im komplexen ausdrücken:

$$\begin{aligned} E_{1r} &= E_0 \cdot r e^{i\omega t} \\ E_{2r} &= E_0 t' - r' t e^{i\omega t - \delta} \\ E_{3r} &= E_0 t' (r')^3 t \cdot e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ E_{4r} &= E_0 t' (r')^5 t \cdot e^{i(\omega t - 3\delta)} \\ &\vdots \\ E_{nr} &= E_0 t' (r')^{2n-3} \cdot e^{i(\omega t - (n-1)\delta)} \\ E_r &= \sum_{i=1}^n E_{ir} \\ E_r &= E_0 e^{i\omega t} \left[r + t' \cdot r' \cdot t e^{-i\delta} - 1 + r'^2 t e^{-i\delta} + r'^4 e^{-i2\delta} + \dots \right] \\ E_r &= E_0 e^{i\omega t} \left[r + t' r' t e^{-i\delta} \left(1 + ((r')^2 t e^{-i\delta})^1 + ((r')^2 t e^{-i\delta})^2 + ((r')^2 t e^{-i\delta})^3 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

mit $|r'^2| e^{-i\delta}$

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{t' r' t e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}} \right]$$

mit $r' = -r$ und $t' \cdot t = 1 - r^2$

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 e^{i\omega t} \left[r - \frac{r(1-r^2)e^{-i\delta}}{1-r^2e^{-i\delta}} \right] \\ E_r &= E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{r(1-e^{-i\delta})}{1-r^2e^{-i\delta}} \right] \end{aligned}$$

Für die Intensitäten:

$$\begin{aligned} I_r &= \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \frac{E_r E_r^*}{2} \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \frac{E_0^2}{2}}_{I_i} r^2 \frac{(1-e^{-i\delta})(1-e^{+i\delta})}{1-r^2e^{-i\delta}} (1-r^2e^{+i\delta}) \end{aligned}$$

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1-\cos \delta)}{(1+r^4)-2r^2 \cos \delta}$$

Intensität des reflektierten Lichtes

$$I_t = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^4)-2r^2 \cos \delta}$$

Intensität des transmittierten Lichtes

Da $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ ist:

$$I_r = I_i \frac{\left[\frac{2r}{1-r^2} \right] \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

und

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + \left(\frac{2r}{1-r^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

In der Summe:

$$\boxed{I_r + I_t = I_i}$$

Wann ist das Transmittierte Licht maximal?

$$\begin{aligned} I_{t \max} &= I_i & \text{für } \delta = 0 \\ I_{r \min} &= 0 \end{aligned}$$

Wann ist die Transmission minimal? Dazu muss der Nenner maximal werden: $\cos \delta = 1$:

$$\begin{aligned} I_{t \min} &= I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \\ I_{t \max} &= I_i \frac{(4r^2)}{(1+r^2)^2} \end{aligned}$$

Neue Größe – F – **Finessefaktor**:

$$F = \left(\frac{2r}{1-r^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{I_i} &= F \cdot \frac{1}{1+F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}} \\ \frac{I_r}{I_i} &= F \cdot \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{1+F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{(1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2})^2}$$

Airy-Fkt

Halbwertsbreite in Transmission

$$\frac{1}{2} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$\delta_{1/2} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}}$$

$$\boxed{\frac{\pi \sqrt{F}}{2}}$$

Finesse

Fabry-Perot-Spektrometer: $F \approx 30$, die besten erreichen maximal $F \approx 1000$.

Literatur

Hecht, Optik – S.212, S. 609

Tipler, Physik – S. 1111

3.1.4 Fabri-Perot-Etalon

Messmethode um Spektrallinien zu messen: **Fabry-Perot-Interferometer**.

Zwei planparallele Platten (Etalon), die auf der Innenseite stark reflektieren. Die Lichtquelle (außerhalb, monochromatisch) strahlt Licht aus welches mit einer Linse parallel gemacht wird. Im Inneren wird das Licht mehrfach reflektiert und tritt mit einer Phasenverschiebung aus. Danach wird es mit einer weiteren Linse auf einen Punkt auf der Bildebene gebracht. Wenn der Wegunterschied im Etalon gleich $d = n \cdot \lambda$ ist, dann sieht man auf dem Schirm ein Maximum.

Bei einer ausgedehnten Lichtquelle, die an verschiedenen Punkten zu verschiedenen Zeiten Licht aussendet erhält man paralleles Licht, welches aber um einen Winkel (α) verdreht ist. Es resultiert ein anderer Lichtweg als bei der Punktquelle. Auf dem Bildschirm entstehen Ringe.

Ringmuster, das bei einer ausgedehnten Lichtquelle in einem Fabry-Perot-Interferometer entsteht.

Der Phasenunterschied ist bei senkrechtem Durchgang $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$. Der Wegunterschied ist aber $2 \cdot dn$. Bei positiver Interferenz ist der aber $\delta = 2 \cdot m\pi$. Wie groß ist nun dieses m ?

Für $\lambda = 560 \text{ nm}$, $d = 2 \text{ cm}$ und $n = 1,4$ ergibt sich:

$$m = \frac{2dn}{\lambda} \approx 10^5$$

Diese Ordnung erkennt man als konzentrische Kreise auf dem Schirm. Damit kann man also λ bestimmen:

$$\Delta = 2d \cos \beta = 2d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Wir müssen die Winkel im Etalon genauer betrachten.

$$\Delta_{\text{Reflexion}} = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AD}$$

$$\Delta_{\text{Transmission}} = \overline{BC} + \overline{CE} - \overline{EB}$$

Dieses Δ muss nach Bedingung ein Vielfaches von λ sein.

Für den ersten Ring:

$$4d^2(n^2 - \sin^2 \alpha_1) = m^2 \lambda^2$$

Für den p -ten Ring:

$$4d^2(n^2 - \sin^2 \alpha_p) = (m - p)^2 \lambda^2 \stackrel{(m=m_0-p)}{=} m_0^2 \lambda^2 - m_0 p \lambda^2 + \cancel{p^2 \lambda^2}$$

$$\sin^2 \alpha_p = \left[n^2 - \frac{m_0^2 \lambda^2}{4d^2} \right] + \frac{2m_0 \cdot p \lambda^2}{4d^2}$$

$$\Rightarrow m_0 = \frac{2dn}{\lambda}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Vergleiche mit oben für den zentralen Einfall (entspricht dem ersten Ring). Eingesetzt in $\sin^2 \alpha_p$:

$$\sin^2 \alpha_p = p \cdot \frac{n}{d} \cdot \lambda$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Wie lassen sich die beiden Peaks trennen?

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi m$$

Der Unterschied $\Delta\delta$ zwischen den Peaks:

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \frac{\partial\delta}{\partial\lambda} \Delta\lambda = -\frac{2\pi\Delta}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda \\ \sin \Delta\delta &= \frac{2}{\sqrt{F}} \quad F = \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 \\ \Delta\delta &= \frac{2}{\lambda^2} \cdot 2\pi \cdot \Delta \cdot \Delta\lambda = 2\pi \cdot m \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{F}} \end{aligned}$$

Hierbei sind $m = \frac{\delta}{2\pi}$ und $\Delta = m \cdot \lambda$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \pi\sqrt{F}$$

Auflösungsvermögen

Das Auflösungsvermögen steigt mit der Reflexion, das heißt starke Reflexion führt zu scharfer Auflösung, jedoch auch zu geringerer Intensität.

Man kann λ durch Änderung der Dicke des Etalons und durch Änderung des Brechungsindex bestimmen, durch den Intensitätsverlauf der nullten Ordnung. Praktisch verwendet man Gase, der Brechungsindex über den Druck geändert wird.

3.1.5 Interferenz an dünnen Schichten

Literatur: Tipler S. 1111, Hecht S. 655

Stark vergrößert sieht das wie in der Skizze aus.

Der einfallende Strahl wird einmal reflektiert und einmal in die dünne Schicht hineingebrichen. In der Schicht wird der Strahl reflektiert und tritt aus der Schicht wieder aus. Bring man beiden Strahlen mit diesem Gangunterschied zusammen, so interferieren sie am Ort P . Diese Art von Interferenz nennt man **Interferenz durch Amplitudenaufteilung**. Sie tritt für Strahlen gleicher Neigung auf.

Die Strahlen 1 und 2 sind kohärent. Wären die Lichtquellen in den Punkten A und C , würde keine Interferenz auftreten, da die Wellen nicht kohärent wären.

Betrachte den Wegunterschied

$$\Delta) 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AD}$$

Zu sehen sind Kreise. Bei den reflektierten Strahlen ist die Mitte dunkel, bei den transmittierten Strahlen ist die Mitte hell.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Wie entstehen die vielen Ringe? (Zu finden im „Hecht“)

Durch die Aussendung des Lichtes in verschiedene Richtungen ist der Wegunterschied sehr unterschiedlich. Dadurch entstehen verschiedene Ringe. Bunte Ringe erhalte ich bei weißem Licht. Bei einer Ausgedehnten Lichtquelle treffen Strahlen, welche unter gleichem Winkel die Quelle verlassen treffen im selben Punkt auf den Schirm.

Newtonsche Ringe entstehen, wenn sich die dicke des Mediums ändert. Man nimmt dazu eine konvexe Linse, die man auf eine Glasplatte mit der Krümmung nach unten legt.

Ein senkrechter Strahl wird zum Teil direkt reflektiert, der andere Teil wird transmittiert und an der unten befindlichen Glasplatte reflektiert. Interessant ist der Unterschied zwischen E_{1r} und E_{2r} :

$$\begin{aligned} x^2 &= R^2 - (R - d)^2 \\ &= 2Rd - d^2 \\ R \gg d & \\ &= 2Rd \end{aligned}$$

Dabei ist d eigentlich $n \cdot d$.

Für das Interferenzmaximum m -ter Ordnung:

$$2n \cdot d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_n$$

Für x ergibt sich dann

$$x_m^{\text{hell}} = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda_n \cdot R}$$

Radius des m -ten hellen Ringes

Man kann noch

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$$

einsetzen, wobei λ_0 die Wellenlänge im Vakuum ist.

Wie ist der Radius des m -ten dunklen Ringes?

$$x_m^{\text{dunkel}} = \sqrt{m \lambda_n \cdot R}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

3.1.6 Interferenz am Biprisma

Betrachte ein dünnes Prisma. Betrachte Strahlen von einer Lichtquelle Q , diese werden gebrochen und fallen auf den Schirm. Alle linken Strahlen scheinen von einer Quelle Q_2 zu kommen. Analog für die rechte Seite. Hier kommen die Strahlen scheinbar von einer Quelle Q_1 .

Dadurch, dass scheinbar zwei (virtuelle) Quellen Licht aussenden, das automatisch kohärent ist (nur eine reale Quelle), kann es auf dem Schirm zu Interferenz kommen.

Diese Interferenz heißt **Interferenz durch Wellenfrontenaufteilung**.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

3.1.7 Interferenz am Biprisma

Wegunterschied $\Delta = \overline{Q_2P} - \overline{Q_1P}$, Abstand S

Damit ergibt sich:

$$\Delta = \sqrt{S^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2} - \sqrt{S^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2}$$

Mit der Näherung $S \gg d$ und Entwicklung $\sqrt{1 \pm a} \approx \pm \frac{1}{2}a \dots$

$$\Rightarrow \Delta = d \cdot \frac{x}{s}$$

folgende besondere Punkt Maxima $\Delta = m\lambda$
 Nullstellen $\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ in die Gleichung einsetzen.

Maxima bei $x = m \cdot S \cdot \frac{\lambda}{d}$

Abstand zweier Maxima: $\Delta x = s \cdot \frac{\lambda}{d}$. Die Maxima haben alle den gleichen Abstand von einander (äquidistant), im Gegensatz zu den Newtonschen Ringen.

Untersuchung der Intensität:

$$\begin{aligned} I(P) &\sim \overline{E^2}^t(P) \quad (\overline{E}^t - \text{das zeitlich Mittel}) \\ &= [E_1(P) + E_2(P)]^2 \\ &= I_1(P) + I_2(P) + \underbrace{2 \cdot \overline{E_1 E_2}^t}_{=I_{12}} \end{aligned}$$

Praktisch angewendet auf die allgemeine Wellengleichung einer harmonischen Welle mit

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos(kr - \omega t) \\ E_2 &= E_0 \cos(kr + k \cdot \Delta - \omega t) \end{aligned}$$

Für die Intensitäten ergibt sich dann:

(beachte Additionstheorem (*): $\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(2\alpha)$)

$$\begin{aligned} I_1 &= E_0^2 \cdot \overline{\cos^2(kr - \omega t)}^t \\ I_2 &= E_0^2 \cdot \overline{\cos^2(kr + k \cdot \Delta - \omega t)}^t \\ I_1 = I_2 &= \frac{E_0^2}{2} \end{aligned}$$

Mit(*) folgt

$$I_{12} = 2E_0^2 \cdot \overline{\cos(k \cdot \Delta \cos^2(k \cdot r - \omega t))}^t = E_0^2 \cdot \cos(k \cdot \Delta)$$

Die Gesamtintensität

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_{12} = 2I_1 (1 + \cos^2(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta)) \\ &= 4I_1 \cdot \cos^2(\frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda}) \end{aligned}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Wir hatten schon:

$$\delta = 2\pi \cdot m = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$$

und

$$\delta_{1/2} = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{F}} = \frac{2}{\sqrt{F}}$$

Damit lässt sich der Phasenunterschied errechnen:

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda} = \frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \left| -\frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda^2} \right|$$

$$\Delta\delta = \frac{2\pi \cdot \Delta \cdot \Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{2\pi \cdot m \cdot \lambda \cdot \Delta\lambda}{\lambda^2} = 2\pi m \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \stackrel{!}{=} \delta_{1/2} \quad \text{Skizze Platzhalter}$$

Nach dem Rayleigh-Kriterium muss der letzte Ausdruck gleich $\lambda_{1/2}$ sein, da das der kleinste noch auflösbare Abstand ist. Das eingesetzt ergibt:

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \pi \cdot m \cdot \sqrt{F}}$$

Auflösungsvermögen

3.2 Interferenz am Doppelspalt

Eine ebene Welle fällt auf einen Doppelspalt. Nun ist die Interferenz am Punkt P interessant. Die ausgehenden Kugelwellen hinter dem Spalt sind kohärent, da sie von der selben Welle ausgehen. Diese Kugelwellen strahlen in den ganzen Raum aus, deshalb kann man den Schirm beliebig verschieben und man erhält immer ein Interferenzmuster.

Man beobachtet eine Abhängigkeit der Abstände der Maxima bzw. Minima von der Gitterkonstante (Abstand der Spalten) und der Frequenz der Wellen. In großer Entfernung beobachtet man ein einfaches Interferenzmuster, während dieses in der Nähe der Spalte sehr komplex ist.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Im Folgenden betrachten wir nur das Fernfeld ($d \ll l$) nach Fraunhofer. Um das zu realisieren wird mit einer Sammellinse das Licht auf einen Punkt zu gebrochen.

Wie ist der Abstand y der Maxima? Im unendlichen sind die Ausbreitungsrichtungen der Wellen nach dem Spalt annähernd parallel. Der Wegunterschied ist $\Delta = d \cdot \sin \Theta$

– Die hellen Streifen entstehen bei konstruktiver Interferenz. Dazu muss $d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$ gelten.

– Durch Destruktive Interferenz entstehen die dunklen Streifen bei $d \cdot \sin \Theta = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$.

Wir betrachten den m -ten Streifen:

$$\tan \Theta = \frac{y_m}{l} \approx \sin \Theta \approx \Theta$$

Für die Phasendifferenz im Punkt P gilt

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \Theta$$

für kleine Θ ist $d \cdot \sin \Theta \approx d \cdot \tan \Theta = d \cdot \frac{y_m}{l} = m \cdot \lambda$, also

$$y_m = m \cdot \frac{\lambda \cdot l}{d}$$

Der Abstand zweier Streifen ergibt sich aus der Differenz vom m -ten Streifen und den $m + 1$ -ten Streifen:

$$\Delta y = \frac{\lambda \cdot l}{d}$$

Für die Intensität ergibt sich wegen $E_1 = E_0 \cdot \sin \omega t$ und $E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = 2 \cdot E_0 \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\delta}{2}) \\ I &\approx 4n \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\frac{\delta}{2}) \end{aligned}$$

mit $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$ und $d \cdot \sin \Theta = \frac{y \cdot d}{l}$ ist

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \sin \Theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{y \cdot d}{l}$$

$$I(y) = 4n \cdot I_0 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi y d}{\lambda l}\right)$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

3.3 Vektoraddition von harmonischen Wellen

3.3.1 trigonometrische Funktionen

gegeben sind werden zwei harmonische Wellen der selben Frequenzen:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1) \\ E_2 &= E_{02} \cdot \sin(\omega t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Für die resultierende Welle ergibt sich

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha) \\ &= E_{01} \cdot (\sin(\omega t) \cos \alpha_1 + \cos(\omega t) \sin \alpha_1) \\ &+ E_{02} \cdot (\sin(\omega t) \cos \alpha_2 + \cos(\omega t) \sin \alpha_2) \\ &= (E_{01} \cdot \cos \alpha_1 + E_{02} \cdot \cos \alpha_2) \cdot \sin(\omega t) \\ &+ (E_{01} \cdot \sin \alpha_1 + E_{02} \cdot \sin \alpha_2) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} E_0 \cdot \cos \alpha &= E_{01} \cdot \cos \alpha_1 + E_{02} \cdot \cos \alpha_2 \quad |^2 \\ E_0 \cdot \sin \alpha &= E_{01} \cdot \sin \alpha_1 + E_{02} \cdot \sin \alpha_2 \quad |^2 \end{aligned}$$

folgt

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Durch die Division der Ausdrücke entsteht der Tangens:

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2}$$

Also ist die Gesamtwellen:

$$E = E_0 \cdot \cos \alpha \cdot \sin(\omega t) + E_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\omega t)$$

$$E = E_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

3.3.2 Komplexe Zahlen

Aus $E_0 = E_{01} \cdot \cos(\alpha_1 \mp \omega t)$ wird $\tilde{E}_1 = E_{01} e^{i(\alpha_1 \mp \omega t)}$, wobei ersteres der Realteil von letzterem ist.

Damit lassen leicht N Wellen mit gleicher Frequenz addieren. Hier als Beispiel für Wellen, die in positiver Richtung laufen.

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \left[\sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \right] e^{i\omega t} \\ \tilde{E} &= E_0 e^{i(\alpha + \omega t)} \\ E_0 e^{i\alpha} &= \sum_{j=1}^N E_{0j} e^{i\alpha_j} \end{aligned}$$

Die Welle hat hier mit $E_0 e^{i\alpha}$ eine komplexe Amplitude.

Zur Berechnung der Intensität verwendet man

$$E_0^2 = (E_0 e^{i\alpha}) (E_0 e^{i\alpha})^*$$

Als Beispiel rechnen wir $N = 2$:

$$\begin{aligned} E_0^2 &= (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2}) \cdot (E_{01} e^{-i\alpha_1} + E_{02} e^{-i\alpha_2}) \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)}] \quad (\operatorname{Re} \tilde{x} = \cos x) \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 \cdot E_{01} E_{02} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

3.3.3 Zeigerdiagramm

Die Welle $E_1 = E_{01} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1)$ wird als Zeiger der Länge E_{01} in das Diagramm eingetragen. Er dreht sich mit der Geschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn. Die Welle ergibt sich dann wieder als Projektion des Zeigers auf die imaginäre Achse.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

Als Beispiel wieder die Addition von zwei Wellen.

Dazu machen wir eine einfache Vektoraddition. Also ist $\text{Im } E_1 + \text{Im } E_2 = \text{Im } E_{\text{res}}$ (analog für $\text{Re } E_{\text{res}}$). Mit dem Cosinussatz folgt:

$$\begin{aligned} E_0^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2 \cdot E_{01} E_{02} \cdot \cos(180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1)) \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} E_{02} \cdot \cos \alpha_2 - \alpha_2 \end{aligned}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Wir benutzen dieses Verfahren um die Verschiebung y zu bestimmen.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cdot \sin(\omega t) \\ E_2 &= E_0 \cdot \sin(\omega t + \delta) \\ E_3 &= E_0 \cdot \sin(\omega t + 2\delta) \end{aligned}$$

Mit

$$\delta = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda} \cdot \sin \Theta \approx \frac{2\pi \cdot y \cdot d}{\lambda \cdot l}$$

Die Maxima entstehen bei $d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$. Wenn ich jetzt drei Strahlen mit einer Phasenverschiebung von $\delta = \frac{2\pi}{3}$, dann löschen sich die Strahlen gegenseitig aus.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

3.4 Beugung am Einzelspalt

Voraussetzungen:

- einfallende Welle: eben, senkrecht auf Spalt auftreffend
- (unendlich) langer Spalt, gerade, Breite a (in Größenordnung der Wellenlänge)
- Beobachtung der Intensitätsverteilung in einer Entfernung \gg Breite a des Spaltes

Hintergrund für die große Entfernung: Einfallende Wellen sind eben, ausfallende Wellen in großer Entfernung wieder eben.

Vorgehen:

- Addition von Kugelwellen im Spalt (Huygens-Fresnelsches Prinzip)
- Berechnung der resultierenden Intensität in Richtungen Θ (Beobachtungswinkel) zur ursprünglichen Ausbreitungsrichtung der Welle.

Die monochromatische Welle der Wellenlänge λ trifft von links auf den Spalt. Die Normalenrichtung ist senkrecht zum Spalt. Die Breite in Zeichenebene sei a , senkrecht unendlich. Nach dem Huygens'schen Prinzip sind zwischen dem Spalt Zentren neuer Elementarwellen. Der Winkel Θ ist zwischen dem Lot und der Ausbreitungsrichtung der resultierenden Wellen. Ganz allgemein:

- $(N + 1)$ Punktwellen im Abstand $d = \frac{a}{N}$: Jede Elementarwelle habe E' .
- Betrachte die Phasendifferenz δ zwischen benachbarten Wellen. Diese ergibt sich aus dem Lot von einer Welle auf eine benachbarte.

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \Theta$$

Wie kann man die Amplitude aller resultierenden Wellen berechnen? Aus der Phasenverschiebung entstehen Amplituden mit unterschiedlichen Richtungen. Es ergibt sich aus der Addition ein Kreis.

- Interessant ist der Radius des Kreises:

$$r = \frac{E'}{2 \sin(\delta/2)}$$

- Öffnungswinkel Φ des Kreisbogens:

$$\Phi = \sum_{N+1} \delta = (N + 1) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \Theta = \frac{N + 1}{N} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \Theta$$

Betrachte $N \rightarrow \infty$

$$\Phi = 2\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin \Theta$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

- Für die resultierende Amplitude folgt

$$E = 2r \sin \frac{d}{2}$$

- Bogenlänge:

$$N \cdot E' = E_0 = r \cdot \Phi$$

r ersetzen mit dem obigen Ausdruck. Es ergibt sich:

$$E(\Phi) = 2 \cdot \frac{E_0}{\Phi} \cdot \sin \left(\frac{\Phi}{2} \right) = E_0 \cdot \frac{\sin(\Phi/2)}{\Phi/2}$$

Mit einer Ausgangsintensität $I_0 = \frac{1}{2} \cdot n c \epsilon_0 \cdot E_0^2$, welche der Intensität der Einfallenden Welle entspricht ergibt sich. Ersetzen von Φ durch den obigen Ausdruck $\Phi(\Theta)$ folgt ein anschaulicherer Ausdruck.

$$I(\Phi) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(\Phi/2)}{\Phi/2} \right)^2 \Rightarrow \boxed{I(\Theta) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \Theta)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \Theta} \right)^2}$$

Praktisch wird eine Sammellinse verwendet und den Schirm im den Brennpunkt gestellt.

Diskussion:

- Die Lage der Intensitätsminima sind einfach festzustellen. Dort ist $I = 0$ für $\frac{2}{d} = m\pi$ bzw. $a \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$ mit $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$
- Die Lage der Nebenmaxima wird näherungsweise genau zwischen den Minima angenommen. Also $\frac{\Phi}{2} = (2j + 1) \frac{\pi}{2}$ mit $j \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Außerdem gibt es noch das Hauptmaximum bei $\Phi = 0$, $I = I_0$.
- Die Untersuchung der Höhe der Nebenmaxima liefert:

$$E_{\max,j} = E_0 \cdot \frac{\sin((j + 1/2) \cdot \pi)}{(j + 1/2) \cdot \pi} = \frac{\pm E_0}{(j + \frac{1}{2})\pi}$$

Die Intensitätsmaxima erhält man durch Quadrierung:

$$I_{\max,j} = \frac{I_0}{((j + \frac{1}{2})\pi)^2}$$

Hierbei ist j die Ordnung des Beugungsmaximums.

Simulation unter <http://www.walter-fendt.de/ph14d/einfachspalt.htm>

Die folgenden Hinweise erfolgen nur kurz. Zur weiteren Information in der entsprechenden Literatur nachschauen.

- (a) Beugung an einer Kreisblende des Durchmessers d . Zur Berechnung würde man wieder über viele Elementarwellen addieren.

$$I = I_0 \left(\frac{J_1 \left(\frac{\pi d \cdot \sin \Theta}{\lambda} \right)}{\frac{\pi d \cdot \sin \Theta}{\lambda}} \right)^2$$

J_1 – Besselfunktion erster Ordnung (eine Art Sinusfunktion mit abnehmender Amplitude und Periode)

Θ – Winkel zur Einfallrichtung

In der Mitte entsteht ein heller Kreis (zentrales Maximum, Beugungsscheibchen), darum weitere Nebenmaxima konzentrisch angeordnet. Das erste Minimum liegt hier bei $\sin \Theta_{\min,1} \approx 1,22 \frac{\lambda}{a}$

- (b) **Babinet'sche Theorem** Komplementäre Schirme (Vertauschung von Öffnungen und nicht transparenten Bereichen) liefern außerhalb des Bereiches der geometrisch-optischen Abbildung die gleichen Intensitätsverteilungen.

Als Beispiel betrachte eine Kreisöffnung, die durch einen Kreisring ersetzt wird.

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

3.5 Beugung am realen Doppelspalt

Voraussetzungen:

- Ebene Welle die senkrecht zum Doppelspalt einfällt.
- Der Doppelspalt bestehe aus (unendlich) langen geraden Spalten der Breite a im Abstand d .
- Beobachtung der Intensitätsverteilung in Entfernungen, die viel größer sind als der Spaltabstand.

Vorgehen:

- Überlagerung der Beugungsmuster am Spalt mit dem Beugungsmuster am idealen Doppelspalt ($a \rightarrow 0$) erfolgt multiplikativ, dies folgt aus der Addition der einzelnen Elementarwellen, was mathematisch der Addition der Fourierkoeffizienten entspricht. Wiederholung zur Intensität am idealen Doppelspalt:

$$E_1 = E_0 \cdot \sin \omega t \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \delta)$$

$$\text{mit } \delta = 2\pi \cdot \frac{d \cdot \sin \Theta}{\lambda}$$

$$E = 2 \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

Das zeitliche Mittel wird quadriert:

$$\begin{aligned} I(\delta) &= nc\varepsilon_0 \cdot \overline{E^2}^t \\ &= nc\varepsilon_0 \cdot 2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2(\delta/2) \\ &= nc\varepsilon_0 \cdot 2 \cdot E_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \Theta}{\lambda}\right) \\ &= 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

Gesamtintensität am realen Doppelspalt:

$$I(\Theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin \frac{\Phi(\Theta)}{2}}{\frac{\Phi(\Theta)}{2}} \right)^2 \cdot \cos^2 \frac{\delta(\Theta)}{2}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter

3.6 Fraunhofer- und Fresnel-Beugung

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst die Fresnel-Beugung in einer Halbebene.

Für jede Elementarwelle im Spalt ist die Weglänge.

$$S = \sqrt{D^2 + (x - x')^2}$$

GRAPHIK

(wird nachgereicht)

Skizze Platzhalter