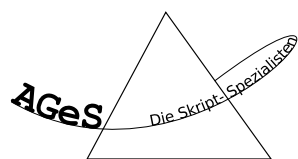


ANALYSIS II FÜR PHYSIKER

nach den Vorlesungen von Prof. Dr. Werner Timmermann
(Sommersemester 2007)

Herausgegeben von



Jeffrey Kelling
Felix Lemke
Stefan Majewsky

Stand: 23. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort (zuerst lesen)	3
6 Differentiation	4
6.6 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	4
7 Integralrechnung für Funktionen einer Variable (Riemann-Integral)	9
7.1 Definition und erste Eigenschaften	9
7.2 Hauptsatz (Fundamentalsatz) der Differential- und Integralrechnung	16
7.3 Integrationsmethoden	18
7.4 Typische Anwendungen des Riemann-Integrals	22
7.5 Uneigentliche Integrale	23
7.5.1 Unbeschränkte Integranden	23
7.5.2 Unbeschränkte Integrationsintervalle	25
7.6 Das Riemann-Stieltjes-Integral	25
8 Kurvenintegrale	32
8.1 Wege und Kurven	32
8.2 Weg- und Kurvenintegrale	37
8.3 Gradientenfelder und Wegunabhängigkeit	40
9 Verschiedene Ergänzungen	44
9.1 Gleichmäßige Konvergenz	44
9.2 Bemerkungen zur Variationsrechnung	48
9.2.1 Beispiele und Problemstellungen	48
9.2.2 Euler-Lagrange-Gleichungen	52
9.3 Umkehrabbildungen und implizite Funktionen	55
9.4 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	58
9.5 Extremwerte mit Nebenbedingungen	63
10 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen	65
10.1 Definition des Riemannintegrals im \mathbb{R}^n	65
10.2 Allgemeine Eigenschaften des Integrals	68
10.3 Satz von Fubini	69
10.4 Koordinatentransformationen in Mehrfachintegralen	71
11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	74
11.1 Integration skalarer Funktionen über Untermannigfaltigkeiten	74
11.2 Orientierung von Mannigfaltigkeiten	80

Vorwort

Bevor Ihr beginnt, mit diesem Skript zu arbeiten, möchten wir vor allem den Studienanfängern eine wichtige Botschaft mitgeben: Dieses Skript ersetzt weder den Besuch der Vorlesung noch das selbstständige Nacharbeiten des Stoffes. Wer das nicht verstanden hat, bei dem kann die Benutzung des Skriptes im weiteren Studienverlauf für Probleme sorgen.

Wir weisen darauf hin, weil das Skript nicht als vorgekaufter Wissensspeicher zu verstehen ist. Das hier ist eine Abschrift des Inhaltes, den die Vorlesung zu vermitteln versucht. Nicht enthalten sind zum Beispiel mündliche Kommentare des Professoren, auch wenn diese im individuellen Falle oft erst den Groschen fallen lassen.

Nochmals möchten wir uns an die Studienanfänger wenden: Hoffentlich begreift Ihr genauso wie wir die ersten Semester Eures Studiums als Chance, Euren persönlichen Lernfluss zu finden. Das Studium verlangt in dieser Beziehung nach eigener Erfahrung wesentlich mehr von einem Studenten ab als eine Schule. Umso wichtiger ist es, herauszufinden, wie man möglichst viel Inhalt in möglichst kurzer Zeit aufnehmen, systematisieren und abspeichern kann.

Eines ist sicher: Das bloße Durchlesen des Skriptes reicht meistens nicht. Zur Aufnahme des Stoffes und für einen ersten Überblick reicht in den meisten Fällen das klassische Mitschreiben in der Vorlesung, bei wenigen auch das aufmerksame Zuhören. Zum Systematisieren ist der Besuch der Übungen und das Bearbeiten der Übungsaufgaben unerlässlich (auch wenn einige Erstsemester das immer wieder mal anders sehen, aber das gibt sich). Eine andere gute Idee ist oft auch die Bildung von eigenen kleinen Lehrgruppen von drei bis vier Personen, auch wenn man da aufpassen muss, sich nicht abzulenken.

Bevor wir abschweifen, fassen wir noch kurz zusammen, wofür dieses Skript wirklich geeignet ist: einfach gesagt als Wissensstütze, also zum Beispiel zum schnellen Nachschlagen; außerdem zum Wiederholen früheren Stoffes, sofern ein ausreichendes Grundverständnis vorhanden ist. Nach diesen einleitenden Worten wünschen wir Euch viel Spaß bei der Arbeit mit diesem Skript und viel Erfolg beim Studium!

Die AGeS-Redaktion
www.ages-skripte.org

P.S. Wir suchen immer Helfer, die unsere Skripte um neue Inhalte erweitern, Fehler suchen, oder das Layout ansprechender gestalten wollen. Wenn Ihr Lust habt, meldet Euch über unsere Webseite.

6 Differentiation

6.6 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wiederholungen

Zu lösen ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung (DGL) der Form:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = f$$

Mit der Kurzschreibweise $D = \frac{d}{dt}$ ergibt sich:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0)x = f \quad (1)$$

Die entsprechende homogene DGL ergibt sich für: $f = 0$ (2)

Mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (3)$$

ist (2) äquivalent zu $p(D)x = 0$. Wir suchen nun die Lösungen dieser Differentialgleichung. Genauer: Wir suchen eine Basis des Lösungsraumes.

Satz 6.34 Partialbruchzerlegung

Sei $R = \frac{P}{Q}$ mit den Polynomen P und Q , wobei $\text{grad } P < \text{grad } Q$. O.E.d.A. sei der höchste Koeffizient von $Q = 1$. Q habe die Nullstellen x_1, \dots, x_k mit den Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, also:

$$Q = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}$$

Dann hat R folgende Darstellung:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \frac{A_2^1}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x - x_1)^{\alpha_1}} +$$

$$+ \frac{A_1^2}{(x - x_2)} + \dots + \frac{A_{\alpha_2}^2}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^k}{(x - x_k)^{\alpha_k}}$$

Zur Lösung von (2) verwenden wir den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$. Durch Einsetzen in (2) und Dividieren durch $e^{\lambda t}$ entsteht die Gleichung $p(\lambda) = 0$.

Die gesuchten Nullstellen von p seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten k_1, \dots, k_m . Aus der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{p(\lambda)}$ erhält man folgende Darstellung:

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}} = \frac{q_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{q_m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$$

Wenn man beide Seiten mit $p(\lambda)$ multipliziert, gilt also $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$1 = q_1(\lambda)p_1(\lambda) + \dots + q_m(\lambda)p_m(\lambda) \text{ mit } p_i(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$$

Für λ setzen wir nun D ein: (1 entspricht der identischen Abbildung I)

$$Ix = \underbrace{q_1(D)p_1(D)x}_{=:x_1} + \dots + \underbrace{q_m(D)p_m(D)x}_{=:x_m} \quad (4)$$

x, x_1, \dots, x_m sind (C^∞) -Funktionen von t . Sei nun x eine Lösung von (2), d.h. $p(D)x = 0$. Dann gilt:

$$(D - \lambda_l I)^{k_l} x_l = (D - \lambda_l I)^{k_l} \underbrace{q_l(D)p_l(D)x}_{=:x_l} = q_l(D) \underbrace{p(D)x}_{=0} = 0$$

Das heißt, jedes x_l aus der Zerlegung (4) erfüllt die Teilgleichung $(D - \lambda_l I)^{k_l} x_l = 0$ (5)

Umgekehrt erfüllt jede Lösung x von (5) (d.h. $(D - \lambda_l I)^{k_l} y = 0, y = y(t)$) auch (2), denn

$$p(D)y = p_l(D) \underbrace{(D - \lambda_l I)^{k_l} y}_{=0} = 0$$

Diese Überlegungen fasst der folgende Satz zusammen.

Satz 6.35

Sei $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ die Produktdarstellung des charakteristischen Polynoms zu (2). Dann ist jede Summe bzw. Linearkombination von Lösungen der Teilgleichung (5) auch Lösung von (2). Umgekehrt wird jede Lösung von (2) als Summe von Lösungen von (5) erhalten. Man hat also nur eine Gleichung der folgenden Art zu lösen:

$$(D - \lambda I)^m x = 0 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \quad (6)$$

Ein wichtiger Schritt dazu ist in folgendem Lemma enthalten:

Lemma 6.36

Für eine beliebige Funktion $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ gilt:

$$D^m(e^{\alpha t} x(t)) = e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m x(t) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Beweis durch vollständige Induktion über m

Für $m = 1$ ergibt sich mit der Produktregel:

$$D e^{\alpha t} x(t) = \alpha e^{\alpha t} x + e^{\alpha t} \dot{x} = e^{\alpha t} (\dot{x} + \alpha x) = e^{\alpha t} (D + \alpha I)x$$

Nun sei die Gleichung für m gezeigt.

$$\begin{aligned} D^{m+1}(e^{\alpha t} x) &= D[D^m(e^{\alpha t} x)] = (\text{Induktionsvoraussetzung}) = D(e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m x) = (\text{Produktregel}) \\ &= D(e^{\alpha t}) \cdot (D + \alpha I)^m x + e^{\alpha t} D(D + \alpha I)^m x = \alpha \cdot e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m x + e^{\alpha t} (D + \alpha I)^{m+1} D x \\ &= e^{\alpha t} (D + \alpha I)^m (D + \alpha I)x = e^{\alpha t} (D + \alpha I)^{m+1} x \end{aligned}$$

■

x genügt genau dann der Gleichung (6), wenn $e^{-\lambda t}(D - \lambda I)^m x = 0$ (reine Multiplikation mit $e^{-\lambda t}$). Wegen des vorigen Lemmas ist dies genau dann der Fall, wenn

$$D^m(e^{-\lambda t}x(t)) = 0 \quad (7)$$

(7) ist aber einfach zu lösen.

$$D^m y(t) = 0 \Rightarrow D(D^{m-1}y) = 0 \Rightarrow D^{m-1}y = c_{m-1} \Rightarrow D^{m-2}y = c_{m-1}t + c_{m-2}$$

$$y(t) \stackrel{!}{=} e^{-\lambda t}x(t)$$

Insgesamt: $y(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}$ Also hat die Lösung von (7) die Form

$$x(t) = e^{\lambda t}(c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1})$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_{m-1} .

Satz 6.37 Zusammenfassung

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p von (2) mit den Vielfachheiten k_1, \dots, k_m . Damit erhält man sämtliche Lösungen der Differentialgleichung (2) als Linearkombination von Lösungen der folgenden Gestalt:

$$\left. \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \dots & t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_m t} & t e^{\lambda_m t} & \dots & t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{array} \right\} \quad (8)$$

Da die Menge dieser Lösungen (8) linear unabhängig (als Funktion auf \mathbb{R}) ist, ist die Dimension des Lösungsraumes von (2) genau n . Die Lösungen sind aus $C^\infty(\mathbb{R})$.

Der Beweis für den folgenden Satz ist schwieriger (siehe Kapitel zu gewöhnlichen DGL):

Satz 6.38

Jedes zu (2) gehörende Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.

Wiederholung

Ein Anfangswertproblem besteht aus:

- einer Differentialgleichung $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = 0$
- beliebig vorgegebenen Anfangswerten $\left. \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{array} \right\} x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$

Bemerkung

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms können auch komplex sein. Hat p reelle Koeffizienten, so taucht mit jeder komplexen Nullstelle λ der Vielfachheit k auch $\bar{\lambda}$ mit gleicher Vielfachheit k als Nullstelle auf. Zusammen mit dem Superpositionsprinzip erlaubt das, komplexe Lösungen zu vermeiden.

Das System (8) (die Basis des Lösungsraumes) heißt auch **Fundamentalsystem von Lösungen** von (2). Bezeichnet man die Lösungen (8) mit x_1, \dots, x_n , dann nennt man $x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ ($c_k \in \mathbb{R}$ beliebig) **allgemeine Lösung** von (2).

Die Lösungen der inhomogenen DGL (1) unterliegen wieder dem Superpositionsprinzip: Wenn y_1, y_2 Lösungen von (1) (inhomogen) sind, dann ist $x = y_1 - y_2$ Lösung der homogenen Differentialgleichung. Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gleich einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung plus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Beispiel 6.20

Anfangswertproblem: $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ mit $x(0) = -1$ und $\dot{x}(0) = 3$

1. Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow$ charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$ Nullstellen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
2. Allgemeine Lösung: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$
3. Lösung des Anfangswertproblems ($\hat{=}$ Bestimmung c_1, c_2):

$$\left. \begin{array}{rcl} x(0) = c_1 + c_2 & = & -1 \\ \dot{x}(0) = c_2 + 2c_2 & = & 3 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = -5, c_2 = 4 \Rightarrow x(t) = -5e^t + 4e^{2t}$$

Beispiel 6.21

Gesucht ist eine allgemeine Lösung von $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$. Mit $x(t) = e^{\lambda t}$ ergibt sich das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda_{1,2} = 1$. Das Fundamentalsystem ist also von der Gestalt e^t, te^t . Die allgemeine Lösung ist damit $x(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot te^t$

Beispiel 6.22

Wir suchen die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 4t + 1$ und die Lösung des Anfangswertproblems: $x(0) = \frac{7}{2}, \dot{x}(0) = 1$. Die zugehörige homogene DGL wurde bereits gelöst und lautet

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Wir benötigen eine spezielle Lösung x_s der inhomogenen Differentialgleichung. Unser Ansatz hat dazu die gleiche Struktur wie die rechte Seite der DGL, d.h. wir suchen $x_s(t) = at + b$, also $\dot{x}_s(t) = a$ und $\ddot{x}_s(t) = 0$. Dies setzen wir ein:

$$\begin{aligned} -3a + (2at + b) &= 4t + 1 \\ 2at + 2b - 3a &= 4t + 1 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} t^1 : \quad 2a &= 4 \Rightarrow a = 2 \\ t^0 : \quad 2b - 3a &= 1 \Rightarrow b = \frac{7}{2} \\ &\quad \underbrace{-6}_{-6} \end{aligned}$$

Also lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$x(t) = x_s(t) + x_h(t) = \left(2t + \frac{7}{2}\right) + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

$$\text{Anfangswertproblem: } \left. \begin{array}{l} x(0) = \frac{7}{2} + c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) = 1 = 2 + c_1 + c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -1$$

Bemerkung

Wenn die rechte Seite einer inhomogenen DGL von der Form $f(t) = \sin t$ ist, dann kann man den folgenden Ansatz versuchen:

$$y_0(t) = a \cdot \sin t + b \cdot \cos t$$

Dieser Ansatz muss aber modifiziert, wenn ein sogenannter „Resonanzfall“ vorliegt.

Beispiel 6.23

Umwandeln eines komplexen Fundamentalsystems in ein reelles

Die homogene DGL $\ddot{x} + x = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1 = 0$ und damit die Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Das komplexe Fundamentalsystem ist also:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{it} = \cos t + i \sin t \\x_2(t) &= e^{-it} = \cos t - i \sin t\end{aligned}$$

Mit dem Superpositionsprinzip erhält man das reelle Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) = \cos t \\x'_2(t) &= \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) = \sin t\end{aligned}$$

7 Integralrechnung für Funktionen einer Variable (Riemann-Integral)

Es existieren verschiedene Zugänge zum Riemann-Integral. Das Vorgehen ist pragmatisch ohne jeden Detailbeweis. Das Riemann-Integral genügt für fast alle praktischen Belange, ist aber für theoretische Belange unzureichend. In diesem Fall muss man das Lebesgue-Integral verwenden.

7.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 7.1

1. Eine Fkt. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es Zahlen $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ gibt mit
 - a) f ist konstant in den offenen Intervallen (a_i, a_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n-1$
 - b) $f(x) = 0 \forall x \notin [a_0, a_n]$.
2. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a, b]$, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z} : a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ von $[a, b]$ gibt, so dass obige Eigenschaft a) erfüllt ist.

Bemerkung

1. Die erwähnten Konstanten für die Intervalle (a_i, a_{i+1}) müssen nicht voneinander verschieden sein.
2. Die Funktionswerte von f in den Intervallendpunkten a_k sind beliebig.
3. Ist f eine Treppenfunktion, dann auch $c \cdot f \forall c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 7.1

Sei I ein beliebiges Intervall. Dann ist die charakteristische Funktion dieses Intervalls $\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$ eine Treppenfunktion (auf dem abgeschlossenen Intervall \bar{I}).

Nützlich ist folgender Gleichheitsbegriff: Zwei Treppenfunktionen f, g heißen **fast überall gleich**, wenn für alle bis auf endlich viele $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = g(x)$ gilt. Man schreibt: $f = g$ f.ü. (Achtung: In der Lebesgue'schen Integrationstheorie wird ein allgemeinerer Begriff von „fast überall“ benutzt.)

Sei nun f eine Treppenfunktion auf $[a, b]$ bezüglich der Zerlegung \mathcal{Z} (siehe Definition 7.1) mit:

$$f(x) = \begin{cases} c_k & x \in (a_{k-1}, a_k), k = 1, \dots, n \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Dann ist fast überall $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$, $I_k = (a_{k-1}, a_k)$.

Bemerkung

Die Darstellung einer Treppenfunktion (f.ü.) als solch ein f ist keineswegs eindeutig.

Lemma 7.2

Die Menge $T(a, b)$ der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ bildet eine Algebra über \mathbb{R} , d.h. für $f, g \in T(a, b)$ und $c \in \mathbb{R}$ sind $f + g, c \cdot f, f \cdot g$ wieder in $T(a, b)$.

Definition 7.3 Integral einer Treppenfunktion

Sei $f \in T(a, b)$ und sei f bezüglich einer Zerlegung $\mathcal{Z} : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ gegeben durch

$$f := \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k} \quad \text{mit} \quad I_k = (x_{k-1}, x_k)$$

Dann **setzt** man: $\int_a^b f(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c_k l(I_k)$.

Hierbei ist $l(I_k)$ die Länge der Intervalls I_k . Diese ist gleich für alle Sorten von Intervallen (offen, halboffen, abgeschlossen).

Damit die Definition sinnvoll ist, muss man zeigen, dass sie von der jeweiligen Darstellung von f (insbesondere von der Zerlegung) unabhängig ist. Allgemein zeigt man: Wenn $f = g$ f.ü. in $[a, b]$, dann $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Satz 7.4 Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Seien $f, g \in T(a, b)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\int_a^b \underbrace{(\lambda f + \mu g)(x)}_{=\lambda f(x) + \mu g(x)} dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$
2. $f(x) \leq g(x)$ f.ü. $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
3. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \cdot \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Beweis

Beweisidee zu 1.: Zu f und g gehören die Zerlegung \mathcal{Z} und \mathcal{Z}' . Wir betrachten die Verfeinerung beider Zerlegungen: $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$. Betrachte dann eine neue Darstellung von f und g jeweils bzgl. \mathcal{Z}'' . Dann ist $\lambda f + \mu g$ einfach zu bilden.

Zu 3.: Nach Definition gilt für $f = \sum_k c_k \chi_{I_k}$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_k c_k l(I_k) \right| \leq \underbrace{\sum_k |c_k| \cdot l(I_k)}_{\int_a^b |f(x)| dx} \leq \sum_{x \in [a, b]} \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot l(I_k) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot (b - a)$$



Bemerkung

Die Abbildung $T(a, b) \ni f \mapsto \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$ ist also eine lineare Abbildung $T(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. ein lineares Funktional aus $T(a, b)$. Außerdem gilt nach 2.: Wenn $f \geq 0$ f.ü., dann ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Das heißt, $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ ist ein lineares positives Funktional auf $T(a, b)$.

Nun wollen wir dieses Funktional unter Erhaltung der Linearität und Positivität auf einen möglichst großen Vektorraum von Funktionen fortsetzen. Dafür gibt es einige Varianten. Wir benutzen diejenige, die zum Riemann-Integral führt.

Definition 7.5 Ober- und Unterintegral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Dann nennt man:

$$\int_a^{b_*} f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b h(x) dx : h \in T(a, b), f \leq h \right\} \quad \text{Oberintegral von } f$$

$$\int_{a^*}^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b g(x) dx : g \in T(a, b), g \leq f \right\} \quad \text{Unterintegral von } f$$

Beide Mengen $\{\dots\}$ sind nicht leer, denn da f beschränkt ist, existiert $C, D \in \mathbb{R}$ mit $C \leq f(x) \leq D \forall x \in [a, b]$ und $h \equiv D$ bzw. $g \equiv C$ sind Treppenfunktionen aus $\{\dots\}$.

Beispiel 7.2

1. Wenn f eine Treppenfunktion ist, dann gilt natürlich: $\int_a^b f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx = \int_a^{b_*} f(x) dx$
2. Sei f die Dirichletfunktion auf $[0, 1]$. $\int_a^{b_*} f(x) dx = 1$, $\int_{a^*}^b f(x) dx = 0$

Satz 7.6 Eigenschaften von Ober- und Unterintegral

Für alle beschränkten f, g auf $[a, b]$ gilt:

1. $\int_{a^*}^b f(x) dx \leq \int_a^{b_*} f(x) dx$
2. $\int_a^{b_*} (f(x) + g(x)) dx \leq \int_a^{b_*} f(x) dx + \int_a^{b_*} g(x) dx$ (Subadditivität)
 $\int_a^{b_*} \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^{b_*} f(x) dx$ mit $\lambda \geq 0$
3. $\int_{a^*}^b (f(x) + g(x)) dx \geq \int_{a^*}^b f(x) dx + \int_{a^*}^b g(x) dx$ (Superadditivität)
 $\int_{a^*}^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_{a^*}^b f(x) dx$ mit $\lambda \geq 0$
4. Für $\lambda < 0$ gilt: $\int_a^{b_*} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{a^*}^b f(x) dx$ und $\int_{a^*}^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^{b_*} f(x) dx$

Beweis

zu 2., Teil 1 (als Beispiel für das Beweisschema)

$$\int_a^{b_*} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b h_1(x) dx, h_1 \in T(a, b), h_1 \geq f \right\} =: \inf F$$

$$\int_a^{b_*} g(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b h_2(x) dx, h_2 \in T(a, b), h_2 \geq g \right\} =: \inf G$$

$$\int_a^{b_*} (f(x) + g(x)) dx = \inf \left\{ \int_a^b s(x) dx, s \in T(a, b), s \geq f + g \right\} =: \inf S$$

Aus $h_1 \geq f, h_2 \geq g \Rightarrow h_1 + h_2 \geq f + g$ folgt:

$$\int_a^b (h_1 + h_2) dx \in S \Leftrightarrow F + G = \{\alpha + \beta : \alpha \in F, \beta \in G\} \subset S$$

$$\int_a^b (h_1 + h_2) dx = \underbrace{\int_a^b h_1 dx}_{\in F} + \underbrace{\int_a^b h_2 dx}_{\in G} \Rightarrow \inf S \leq \inf(F + G) = \inf F + \inf G$$

■

Definition 7.7 Riemann-IntegralEine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f heißt **Riemann-integrierbar** (R-integrierbar), wenn

$$\int_a^{b_*} f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx$$

Dann **setzt** man $\int_a^b f(x) dx := \int_a^{b_*} f(x) dx \left(= \int_{a^*}^b f(x) dx \right)$. Zusätzlich vereinbaren wir $\int_a^a f(x) dx = 0$ und $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$. Die Menge aller auf $[a, b]$ R-integrierbaren Fkt. nennen wir $R(a, b)$.**Bemerkung**In $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet x die Integrationsvariable. Diese ist völlig frei wählbar: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(s) ds = \dots$ **Beispiel 7.3**Für die in Bsp. 7.2 besprochenen Funktionen gilt: Alle Treppenfunktionen sind R-integrierbar (d.h. $T(a, b) \subset R(a, b)$), die Dirichletfunktion jedoch nicht.**Satz 7.8** Riemann'sches Integrabilitätskriterium

$$f \in R(a, b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists g, h \in T(a, b), g \leq f \leq h : \int_a^b (h(x) - g(x)) dx \leq \varepsilon \quad (7.1)$$

BemerkungAnschauliche Darstellung: f ist durch die Treppenfunktionen so eingeschlossen, dass der Inhalt zwischen den Graphen von g und h kleiner als ε ist.

Beweis

Hin-Richtung:

$$\int_a^{b_*} f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists h \in T(a, b), h \geq f : \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \geq \int_a^b h(x) dx \\ \exists g \in T(a, b), g \leq f : \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b g(x) dx \end{array} \right\} \Rightarrow (7.1)$$

$$\text{Rück-Richtung: } \left\{ \begin{array}{l} \int_a^{b_*} f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^{b_*} h(x) dx \\ \int_{a^*}^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx = \int_{a^*}^b g(x) dx \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{b_*} f(x) dx - \int_{a^*}^b f(x) dx \leq \int_a^b (h - g)(x) dx \stackrel{(7.1)}{\leq} \varepsilon \Rightarrow \int_a^{b_*} f(x) dx = \int_{a^*}^b f(x) dx \Rightarrow f \in R(a, b)$$

■

Satz 7.9

1. Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist R-integrierbar.
2. Jede auf $[a, b]$ monotone Funktion ist R-integrierbar.

Beweis

zu 1.

Wir wenden an, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen (hier $[a, b]$) gleichmäßig stetig sind. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so gewählt, dass gilt: $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Zerlege nun $[a, b]$ äquidistant mit den Intervallgrenzen $x_k = a + k \cdot h$ mit $k = 0, 1, \dots, N$. N sei so groß, dass $h := \frac{b-a}{N} < \delta$.

Setze nun $I_k := [x_k, x_{k+1}]$, $m_k := \min_{x \in I_k} f(x)$, $M_k := \max_{x \in I_k} f(x)$. Also ist $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Definiere nun zwei Treppenfunktionen:

$$\begin{array}{l} g \text{ mit } g(x) := m_k \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}), g(b) := f(b) \\ h \text{ mit } h(x) := M_k \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}), h(b) := f(b) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \leq f \leq h \\ h(x) - g(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b (h(x) - g(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

■

Satz 7.10 Eigenschaften des Riemann-Integrals, Struktur von $R(a, b)$

Seien $f, g \in R(a, b)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$1. \lambda f + \mu g \in R(a, b) \text{ und } \int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

$$2. f \cdot g \in R(a, b)$$

Aus 1. und 2. folgt: $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ ist ein lineares und positives Funktional auf $R(a, b)$.

$$3. f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$4. |f|, f^+, f^- \in R(a, b)$$

Hierbei ist $f^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ und $f^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$5. \text{ Sei } a < c < b, \text{ dann } f \in R(a, b) \Leftrightarrow f \in R(a, c) \wedge f \in R(c, b) \text{ und } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Beweis

Zu 2.: Beweis durch Fallunterscheidung

1. *Fall:* Seien $f, g \geq 0$, $|f(x)| \leq c$, $|g(x)| \leq c$. Sei $\varepsilon > 0$ sowie $s_1, s_2, u_1, u_2 \in T(a, b)$ so gegeben, dass $s_1 \leq f \leq s_2$ und $u_1 \leq g \leq u_2$. O.E.d.A. sei $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 2c$ und $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2c$ sowie $\int_a^b (s_2 - s_1)(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{4c}$ und $\int_a^b (u_2 - u_1)(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{4c}$. Dann sind $h_1 := s_1 - u_1$ und $h_2 := s_2 - u_2$ auch Treppenfunktionen mit $0 \leq h_1 \leq f \cdot g \leq h_2$ in $[a, b]$. Wir schreiben $h_2 - h_1$ geschickt auf:

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= (s_2 - s_1)u_1 + s_2(u_2 - u_1) \leq 2c(s_2 - s_1) + 2c(u_2 - u_1) \\ \Rightarrow \int_a^b (h_2 - h_1)(x) dx &\leq 2c \int_a^b (s_2 - s_1)(x) dx + 2c \int_a^b (u_2 - u_1)(x) dx \leq \varepsilon \Rightarrow f \cdot g \in R(a, b) \end{aligned}$$

2. *Fall:* Seien f, g beliebig. Setze $c_1 := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $c_2 := \inf_{x \in [a, b]} g(x)$. Dann sind $F := f - c_1$ und $G := g - c_2$ beide ≥ 0 .

$$\Rightarrow f \cdot g = (F + c_1)(G + c_2) = F \cdot G + c_2 F + c_1 G + c_1 c_2 \in R(a, b)$$

Zu 3.: Aus $f \in R(a, b)$ und $f \geq 0$ folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b_*} f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b h(x) dx, h \in T(a, b), 0 \leq f \leq h \right\} \geq 0$$



Satz 7.11

Sei $f \in R(a, b)$. Dann gilt:

1. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
2. Aus $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ folgt $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Beweis

1. Offenbar ist $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Mit 7.10.2 folgt:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Leftrightarrow 1. \text{ Ungleichung}$$

Die zweite Ungleichung folgt dann mit $|f(x)| \leq C := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b C dx = C(b-a)$

2. folgt sofort aus 7.10.3 mit $\int_a^b m dx = m(b-a)$ und analog für M .

■

Satz 7.12

Mittelwertsätze der Integralrechnung

1. *1. Mittelwertsatz:* Seien $f, g \in R(a, b)$, $g \geq 0$ auf $[a, b]$. Dann existiert ein μ mit

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) =: m \leq \mu \leq M := \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad (7.2)$$

$$\text{sodass gilt: } \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \quad (7.3)$$

2. *2. Mittelwertsatz:* Sei f monoton und g stetig auf $[a, b]$. Dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx.$$

Bemerkung

Betrachte für 1. den Spezialfall $g \equiv 1$, $f \geq 0$: $\int_a^b f(x) dx = \mu \int_a^b 1 dx = \mu(b-a)$.

Wenn f stetig ist, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz: $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \mu$.

Beweis

1. Aus (7.2) folgt: $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x)$

$$\stackrel{(7.10.3)}{\Rightarrow} m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

1. *Fall:* Für $\int_a^b g(x) dx = 0$ folgt aus (7.4): $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, also ist (7.3) für alle μ richtig.

2. *Fall:* Wenn $\int_a^b g(x) dx > 0$, setze $\mu := \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$. Daraus folgt (7.3).

2. ist ein Nebenprodukt beim sogenannten Riemann-Stieltjes-Integral (siehe später).

Alternativer Zugang zum R-Integral

Unser bisheriger Zugang ist nur für reellwertige Funktionen, nicht für komplexwertige, vektorwertige Funktionen, etc. geeignet. Sei $\mathcal{Z} := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $I_k := [x_k, x_{k+1}]$ und (ξ_k) ein System von Zwischenpunkten, d.h. $\xi_k \in I_k$. Bilde folgende Summen:

- Zwischensumme $S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$
- Obersumme $O(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sup_{x \in I_i} f(x) \right)}_{=: M_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$
- Untersumme $U(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\inf_{x \in I_i} f(x) \right)}_{=: m_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$

Dann gilt mit unseren alten Begriffen: $\int_a^{b_*} f(x) dx = \inf_{\mathcal{Z}} O(f, \mathcal{Z})$, $\int_{a^*}^b f(x) dx = \sup_{\mathcal{Z}} U(f, \mathcal{Z})$

Mit den Zwischensummen gilt: f ist R-integrierbar genau dann, wenn für jede Zerlegungsfolge (\mathcal{Z}_n) mit $\eta(I_n) =$ größte Teilintervalllänge („Feinheit“) von $\mathcal{Z}_n \rightarrow 0$ gilt: $S(f, \mathcal{Z}_n)$ hat für beliebige Zwischenpunktsysteme einen Grenzwert, welcher von \mathcal{Z}_n mit $\eta(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$ und von den Zwischenpunktsysteme unabhängig ist.

Dann gilt: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{Z}_n)$. Das Integral ist hierbei i.A. keine Zahl, sondern ein Element als dem Wertebereich $W(f)$.

7.2 Hauptsatz (Fundamentalsatz) der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist das wichtigste Instrument zur Berechnung von Integralen. Der folgende Satz ist dabei ein bedeutendes Teilresultat.

Satz 7.13

1. Sei $f \in R(a, b)$. Dann ist F , definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ für $x \in [a, b]$ stetig und $F(a) = 0$.
2. Wenn f stetig ist, ist obiges F differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Bemerkung

1. $\int_a^x f(t) dt$ ist wohldefiniert!
2. Die Integration mit variabler oberer Grenze „verbessert“ also die Eigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit) von f .

Beweis

Zweckmäßig ist folgende Bezeichnung: $\langle c, d \rangle$ sei das abgeschlossene Intervall mit den Grenzen c und d ,

unabhängig von deren Ordnung. Also ist $\langle c, d \rangle := \begin{cases} [c, d] & (c < d) \\ [d, c] & (c > d) \end{cases}$

Zu 1.: F ist in x stetig, denn

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \left(\sup_{t \in \langle x, x+h \rangle} |f(t)| \right) \cdot |h|$$

Zu 2.: f ist in x_0 stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Das bedeutet im Speziellen $\forall t \in \langle x, x_0 \rangle : |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (da $|t - x_0| < \delta$) (*)

Beachte ferner:

$$\int_{x_0}^x f(x_0) dt = f(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ und } F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \stackrel{(**)}{=} \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \left(\begin{array}{l} \text{für } |x - x_0| < \vartheta \\ \text{bzw. } t \in \langle x, x_0 \rangle \end{array} \right) \leq \left| \frac{1}{x - x_0} \right| \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

Bemerkung

Wir haben sogar mehr gezeigt: In allen Punkten $x_0 \in [a, b]$, in denen f stetig ist, ist F differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$.

Definition 7.14

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f auf $[a, b]$, wenn $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$.

Bemerkung

Der Satz 7.13.2 besagt also: Stetige Funktionen besitzen eine Stammfunktion.

Lemma 7.15

Sei F auf $[a, b]$ eine Stammfunktion von f . $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (G differenzierbar) ist genau dann Stammfunktion von f , wenn $F - G = \text{const.}$ in $[a, b]$.

Beweis

Wenn $F - G = c$ konstant ist, dann ist die Ableitung $(F - G)' = F' - G' = 0$, also $F' = G' = f$. Die Rückrichtung ergibt sich in völliger Analogie.

Theorem 7.16 Haupt-/ Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung
 Sei f auf $[a, b]$ stetig und G eine beliebige Stammfunktion von f . Dann folgt:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) =: G(x)|_a^b$$

Beweis

Seien f und F wie im Satz 7.13 (d.h. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$), also ist F eine Stammfunktion von f und $F(a) = 0$. F ist Stammfunktion. Nach Lemma 7.15 gibt es ein c , sodass $F(x) = G(x) + c$. Da $0 = F(a) = G(a) + c$, ist $c = -G(a)$. Also ist $F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + c = G(b) - G(a)$. ■

Diskussion der Ergebnisse

1. Stetige Funktionen sind R-integrierbar und haben eine Stammfunktion, also kann das R-Integral nach dem Hauptsatz beschrieben werden.
2. Bei unstetigen Funktionen wird es problematisch:

Beispiel 7.4

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Natürlich ist $f \in R(a, b)$, denn $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$ (aus Definition). Allerdings hat f auf $[-1, 1]$ keine Stammfunktion F , denn es müsste gelten: $F' = f$. Dann wäre aber für F' der Zwischenwertsatz verletzt.

Beispiel 7.5

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

F ist eine Stammfunktion von f in jedem Intervall $[0, b]$ mit $b > 0$, f ist aber nicht R-integrierbar in $[0, b]$, da f nicht beschränkt ist.

Bezeichnungen

Wenn f stetig ist und F eine Stammfunktion von f ist, dann schreibt man $\int f(t)dt = F + C$ oder $\int f(t)dt = F$ und nennt F bzw. $\int f(t)dt$ **unbestimmtes Integral** von f (auf $[a, b]$). Eigentlich ist das unbestimmte Integral (auf $[a, b]$) die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f (auf $[a, b]$). Manchmal nennt man $\int_a^b f(x)dx$ **bestimmtes Integral** und C **Integrationskonstante**.

Warnung: Man achte immer darauf, in welchen Intervallen die Betrachtungen gültig sind.

7.3 Integrationsmethoden

Beispiel 7.6

trivial

$$\text{Für } x > 0 \text{ ist } \int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \log x + C.$$

Partielle Integration

Unter Ausnutzung der Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ ist

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \Rightarrow \begin{cases} \int uv' dx = uv - \int u'v dx \\ \int u'v dx = uv - \int uv' dx \end{cases}$$

Für das Riemannintegral auf $[a, b]$ ist etwa $\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v dx$.

Beispiel 7.7 Stammfunktion des Logarithmus

Wir wenden einen Trick an. Für alle $x > 0$ ist

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \cdot \log x - \int x \cdot (\log x)' dx = x \cdot \log x - x + C$$

Substitutionsregel

Diese Regel nutzt die Kettenregel $F(u(x))' = (F \circ u)'(x) \cdot u'(x)$ für stetig differenzierbare F, u . Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\underbrace{\int (F \circ u)'(x) dx}_{=F(u(x))} = \int F'(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

Für das bestimmte Integral folgt:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_a^b F(u(x))' dx = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} F(t) dt$$

Symbolisch ist $u'(x) dx = \frac{du}{dx} dx = du$.

Beispiel 7.8

Wir bestimmen $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ und das entsprechende bestimmte Integral in den Grenzen $[1, 2]$ mithilfe der Substitutionsregel. Mit $u(x) = x^2 + 1$ und $f(z) = \frac{1}{z}$ ist $f(u(x)) = \frac{1}{x^2+1}$ und $u'(x) = 2x$. Eine Stammfunktion von f ist F mit $F(z) = \log z$ (für $z > 0$).

$$F(u(x)) = \log(x^2 + 1), \text{ d.h. } \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \log(x^2 + 1) + C \quad \forall x$$

Das bestimmte Integral ist

$$\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_{1+1^2=2}^{1+2^2=5} \frac{du}{u} = \log u|_2^5 = \log 5 - \log 2$$

Alternative Formulierung der Substitution

Wir suchen $\int_a^b f(x) dx$ und substituieren dazu $x = u(t)$ mit der stetig differenzierbaren, bijektiven Funktion $u : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t) dt$$

Beispiel 7.9

Das Integral $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ ist zu bestimmen. Setze $x := r \cdot \sin t$, also $dx = r \cdot \cos t dt$.

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 t} \cdot r \cdot \cos t dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2} r^2$$

Integration rationaler Funktionen

Suche $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ für Polynome p und q .

1. *Schritt:* Wenn der Grad von P größer oder gleich dem Grad von Q ist, führt man zuerst eine Polynomdivision mit Rest durch. Es entsteht ein Polynom und eine neue rationale Funktion, dessen Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Im folgenden können wir daher o.E.d.A. nur rationale Funktionen betrachten, für die diese Relation gilt.

2. *Schritt:* Jetzt wenden wir die Partialbruchzerlegung an. Seien x_1, \dots, x_k die Nullstellen von Q mit den Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, also $Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}$. Nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{\alpha_k}^k}{(x - x_k)^{\alpha_k}}$$

Beispiel 7.10

Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x(x-1)^2}$, also sind die Nullstellen von Q $x_1 = 0$ mit $\alpha_1 = 1$ und $x_2 = 1$ mit $\alpha_2 = 2$. Gemäß dem Satz über die Partialbruchzerlegung macht man folgenden Ansatz:

$$R(x) = \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} \quad (1)$$

a, b, c sind zu bestimmen. Hier führt immer **Koeffizientenvergleich** zum Ziel: Durch Multiplikation beider Seiten von (1) mit $Q(x) = x(x-1)^2$ erhält man:

$$x+1 = a(x-1)^2 + bx + cx(x-1)$$

Nun bringt man alles auf eine Seite und ordnet nach den Potenzen von x :

$$(a+c)x^2 + (b-2a-c-1)x + (a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b-2a-c-1=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$

Es existieren viele verschiedene Methoden neben dem Koeffizientenvergleich, um Partialbruchzerlegung herzustellen.

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Es können auch komplexe Nullstellen von Q auftreten.

Beispiel 7.11

$$R(x) = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+i} + \frac{c}{x-i}$$

a, b, c ergeben sich durch Koeffizientenvergleich: $a = 1, b = c = -\frac{1}{2}$. Um die Integration zu vereinfachen, beseitigen wir komplexe Anteile.

$$R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-i+x+i}{(x-i)(x+i)} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Reelle Nullstellen bereiten in der Integration keine Probleme. Bei einer komplexen Nullstelle λ der Vielfachheit α hat Q immer auch die Nullstelle $\bar{\lambda}$ der Vielfachheit α (da die Koeffizienten von Q reell sind). Es folgt:

$$\underbrace{(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})}_{\geq 0 \forall x} = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + |\lambda|^2 = x^2 - (2 \operatorname{Re} \lambda)x + |\lambda|^2 =: x^2 + px + q$$

$$\Rightarrow [(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})]^\beta = (x^2 + px + q)^\beta \forall \beta$$

Indem man jeweils die Nenner $(x-\lambda)^\beta$ und $(x-\bar{\lambda})^\beta$ zusammenfasst, erhält man nur reelle Ausdrücke. In der Partialbruchzerlegung führt dies also auf Anteile der folgenden Art (mit reellen A_i und B_i):

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + px + q)^m} \quad (+)$$

Beweis

Sei $Q(x) = (x^2 + px + q)^m \cdot Q_1(x)$, sodass $Q_1(x)$ nicht mehr durch $x^2 + px + q$ teilbar ist. Man kann zeigen, dass ein Polynom $P_1(x)$ mit reellen Koeffizienten existiert, sodass

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)} \quad (*)$$

Die sukzessive Anwendung von (*) liefert den Anteil (+). ■

3. *Schritt*: Integriert man nach Beseitigung komplexer Anteile die einzelnen Terme der Partialbruchzerlegung, so hat man Stammfunktionen der folgenden Art zu bestimmen:

1. Einfache reelle Nullstellen:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \log |x-a| = \begin{cases} A \cdot \log(x-a) & x > a \\ A \cdot \log(a-x) & x < a \end{cases}$$

2. Mehrfache reelle Nullstellen: (Beachte $x > a$ und $x < a$.)

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} \quad (m > 1)$$

3. Einfache komplexe Nullstellen: (durch Substitution $x + \frac{p}{2} = t$)

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}$$

4. Mehrfache komplexe Nullstellen: (mit $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = \frac{4q-p^2}{4}$)

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} dx = -\frac{A}{2} \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} - \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)^m}$$

Das rechte Integral kann rekursiv berechnet werden.

Bemerkung

Hat man $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ berechnet, dann gilt diese Gleichung in allen Intervallen der x -Achse, die *keine* Nullstellen des Nennerpolynoms enthalten.

Beispiel 7.12

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx = \log|x| + \frac{2}{x-1} - \log|x-1| + C$$

Hierin stehen alle Stammfunktionen in verschiedenen Intervallen, die weder 0 noch 1 enthalten.

7.4 Typische Anwendungen des Riemann-Integrals

Zu Anwendungen wie Arbeit im Kraftfeld oder Bogenlänge von Kurven siehe spätere Kapitel.

Flächeninhalte

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$. Was soll unter dem (2-dimensionalen) Inhalt von M (also dem Flächeninhalt) verstanden werden? Man postuliert dazu: Einfache Mengen Q (Quadrate, Rechtecke) sollten als Inhalt den elementargeometrischen Inhalt („Länge mal Breite“) haben. Solche Q nennt man **zweidimensionale Intervalle**. Den Inhalt von Q bezeichnet man als $|Q|$.

Dann bilde **Intervallsummen** $M := \bigcup_{i=1}^n Q_i$ mit den Intervallen Q_i , sodass Q_i und Q_j für $i \neq j$ *keine* gemeinsamen inneren Punkte haben. Dann ist $|M| = \sum_{i=1}^n |Q_i|$.

Eigenschaften

1. $M_1 \subset M_2 \Rightarrow |M_1| \leq |M_2|$ (Monotonie)
2. Wenn $M = M_1 \cup M_2$, wobei M_1 und M_2 keine gemeinsamen inneren Punkte haben, dann ist $|M| = |M_1| + |M_2|$.

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Menge. Was soll $|A|$ sein? Betrachte alle Intervallsummen J, K mit $J \subset A \subset K$. Betrachte dann $\sup_{J \subset A} |J|$ und $\inf_{K \supset A} |K|$. Wenn $\sup_{J \subset A} |J| = \inf_{K \supset A} |K|$, dann setzt man $|A| := \sup_{J \subset A} |J| = \inf_{K \supset A} |K|$ und nennt A **quadrierbar** bzw. **Jordan-messbar**.

Beispiel 7.13

Eine Menge aus Punkten ist i.A. nicht Jordan-messbar: $\inf_{K \supset A} |K| = 0$, $\sup_{J \subset A} |J|$ existiert nicht.

Beispiel 7.14

Die Menge aller Punkte mit rationalen Koordinaten im Einheitsquadrat ist nicht Jordan-messbar: $\inf_{K \supset A} |K| = 1$, $\sup_{J \subset A} |J| = 0$ oder existiert nicht (je nach Supremumsdefinition).

Nun kann man den Inhalt einer Menge zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse bestimmen:

1. $f(x) \geq 0 \forall x \Rightarrow |A| = \int_a^b f(x) dx$ - Die Intervallsummen entsprechen den Ober- und Untersummen.
2. Im allgemeinen ist $|A| = \int_c^d |f(x)| dx = \int_c^d f^+(x) dx + \int_c^d f^-(x) dx$.

7.5 Uneigentliche Integrale

Der Riemann'sche Integralbegriff wird auf unbeschränkte Integranden und Integrationsintervalle erweitert.

7.5.1 Unbeschränkte Integranden

Definition 7.17 Unbeschränktheit des Integranden in einem Punkt des Integrationsintervalls

Für die Funktion f liege einer der folgenden drei Fälle vor:

- (a) f ist in $(a, b]$ definiert und für alle $\eta \in (0, b - a)$ in $[a + \eta, b]$ Riemann-integrierbar.

$$\text{Ist } \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx = A, \text{ dann setzt man } \int_a^b f(x) dx := A.$$

- (b) f ist in $[a, b)$ definiert und für alle $\eta \in (0, b - a)$ in $[a, b - \eta]$ Riemann-integrierbar.

$$\text{Ist } \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx = B, \text{ dann setzt man } \int_a^b f(x) dx := B.$$

- (c) f ist in $[a, c) \cup (c, b]$ definiert und für alle $\eta \in (0, \min\{c - a, b - c\})$ in $[a, c - \eta]$ und $[c + \eta, b]$

Riemann-integrierbar. Ist $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\eta} f(x) dx = C_1$ und $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx = C_2$, dann setzt man

$$\int_a^b f(x) dx := C_1 + C_2.$$

Die so definierten Integrale heißen **uneigentliche Integrale**. Wenn die angegebenen Grenzwerte existieren, dann sagt man, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ **konvergiert**. Falls $\int_a^b |f(x)| dx$ konvergiert,

sagt man, dass das Integral $\int_a^b f(x) dx$ **absolut konvergiert**.

Beispiel 7.15

Betrachte $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha \leq 0$ ist uninteressant, es liegt ein gewöhnliches R-Integral vor. Für $\alpha > 0$ ist b kritisch. In $[a, b - \eta]$ liegt stets Riemann-Integrierbarkeit vor.

Fall 1: $\alpha = 1 \Rightarrow \int_a^{b-\eta} \frac{1}{b-x} dx = \log(b-x)|_a^{b-\eta} = \log(b-a) - \log \eta$. Daher existiert $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} \frac{1}{b-x} dx$ nicht.

Fall 2: $\alpha \neq 1 \Rightarrow \int_a^{b-\eta} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = -\frac{1}{1-\alpha} (b-x)^{1-\alpha} \Big|_a^{b-\eta} = -\frac{1}{1-\alpha} [\eta^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}]$ (*)

Für $\alpha < 1$ konvergiert die rechte Seite von (*) für $\eta \rightarrow 0 + 0$ gegen $\frac{1}{1-\alpha} (b-a)^{1-\alpha}$. Für $\alpha > 1$ divergiert das Integral.

\Rightarrow Das Integral konvergiert für alle $\alpha < 1$.

Es folgt ein Beispiel für die Formulierung eines Konvergenzkriteriums.

Satz 7.18

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale

Für f, g liege einer der in Definition 7.17 beschriebenen Fälle vor. Ferner sei $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in D(f) = D(g)$. Wenn $\int_a^b g(x) dx$ konvergiert, dann konvergiert $\int_a^b f(x) dx$ absolut.

Beweis

Als Beispiel wird der Fall b diskutiert.

Nach dem Cauchy Kriterium für Grenzwerte von Funktionen (mit $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} \dots$) gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$, sodass für alle $\eta_1, \eta_2 < \eta$ (o.E.d.A. $\eta_2 < \eta_1$) gilt:

$$\left| \int_a^{b-\eta_2} g(x) dx - \int_a^{b-\eta_1} g(x) dx \right| = \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} g(x) dx < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^{b-\eta_2} f(x) dx - \int_a^{b-\eta_1} f(x) dx \right| = \left| \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x) dx \right| \leq \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} |f(x)| dx \leq \int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} g(x) dx < \varepsilon$$

Nach dem Cauchy Kriterium existiert also $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\eta} |f(x)| dx$, also konvergiert $\int_a^b f(x) dx$ absolut. ■

Der Fall c enthält für den Anfänger eine Falle.

Beispiel 7.16

Betrachte $\int_{-a}^a \frac{1}{x} dx$ mit der kritischen Stelle $c = 0$.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left[\int_{-a}^{-\eta} \frac{1}{x} dx + \int_{\eta}^a \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left[\log(-x) \Big|_{-a}^{-\eta} + \log x \Big|_{\eta}^a \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} (\log \eta - \log a + \log a - \log \eta) = 0$$

Das Integral ist *nicht* konvergent, denn nach Definition 7.17c müssten die **einzelnen** Grenzwerte $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{-a}^{-\eta} \frac{1}{x} dx$ und $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{\eta}^a \frac{1}{x} dx$ existieren, was nicht der Fall ist.

Dennoch hat diese Schlussfolgerung etwas für sich.

Definition 7.19

f sei auf $[a, c) \cup (c, b]$ definiert und auf jedem abgeschlossenen Teilintervall R -integrierbar. Falls $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx \right] = A$ existiert, so definiert man $A =: (H) \int_a^b f(x) dx =: \text{v.p.} \int_a^b f(x) dx$ und nennt (H) den **Cauchy'schen Hauptwert** (valeur principale) des uneigentlichen Integrals von $f(x)$ über $[a, b]$.

Beispiel 7.17

$$(H) \int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = 0$$

7.5.2 Unbeschränkte Integrationsintervalle

Definition 7.20

Für f liege einer der folgenden Fälle vor: $D(f) = [a, \infty)$, $D(f) = (-\infty, b]$ oder $D(f) = \mathbb{R}$. In jedem Falle sei f über jedes komplette Teilintervall seines Definitionsbereiches \mathbb{R} -integrierbar (d.h. f ist **lokal \mathbb{R} -integrierbar**).

(a) Falls $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_a^{\varrho} f(x) dx = A$, setze $\int_a^{\infty} f(x) dx := A$.

(b) Falls $\lim_{\varrho \rightarrow -\infty} \int_{\varrho}^b f(x) dx = B$, setze $\int_{-\infty}^b f(x) dx := B$.

(c) Falls $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_a^{\varrho} f(x) dx = C_1$ und $\lim_{\varrho \rightarrow -\infty} \int_{\varrho}^a f(x) dx = C_2$ ($\forall a \in \mathbb{R}$), setze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C_1 + C_2$.

Man sagt dann, dass die entsprechenden Integrale als uneigentliche Integrale **konvergieren**. Wenn die jeweiligen Integrale über $|f(x)|$ konvergieren, dann heißen die uneigentlichen Integrale **absolut konvergent**. Für den Fall c ist wieder der **Cauchy'sche Hauptwert** definierbar: $(H) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{-\varrho}^{\varrho} f(x) dx$, falls dieser Limes existiert.

Beispiel 7.18

Zu berechnen ist $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ mit $a > 0$.

Für $\alpha \neq 1$ ist $\int_a^{\varrho} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_a^{\varrho} = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{\varrho^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right]$. Dieser Grenzwert existiert nur für $\alpha > 1$, dann ist $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\varrho^{\alpha-1}}$.

Das Majorantenkriterium kann für unbeschränkte Integrationsintervalle fast wörtlich übernommen werden.

7.6 Das Riemann-Stieltjes-Integral

Motivation

Auf der x -Achse liegen in den Punkten x_1, \dots, x_n Massen m_1, \dots, m_n mit der Gesamtmasse $M = m_1 + \dots + m_n$. Der Schwerpunkt ist $X_s = \frac{1}{M} (m_1 \cdot x_1 + \dots + m_n \cdot x_n)$. Nun möge im Intervall $[a', b']$ irgendwie (kontinuierlich oder diskret) Masse verteilt sein. Gesucht ist der Schwerpunkt des Systems.

Dazu betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ mit $a < a'$ und $b' = b$, und die Massenverteilungsfunktion $m(x)$ mit $m(a) = 0$. $m(x)$ = die in $[a, x]$ enthaltene Masse und $m(b) = M$. (Dadurch wird wegen $a < a'$ eine evtl. in a' liegende Masse richtig erfasst.) Für $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ ist $m(b_1) - m(a_1)$ die in $(a_1, b_1]$ enthaltene Masse.

Sei nun $\mathcal{Z} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ein System von Zwischenpunkten von \mathcal{Z} . Dann scheint es natürlich zu sein, den Punkt

$$x_{\mathcal{Z}, \xi} := \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \xi_k (m(x_k) - m(x_{k-1})) \quad (7.5)$$

als Näherung für den Schwerg. zu betrachten. (7.5) erinnert an die Riemann'schen Zwischensummen.

Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung von $[a, b]$ und $d(\mathcal{Z}) = \max_k |x_k - x_{k-1}|$ die **Feinheit** dieser Zerlegung. Eine Zerlegungsfolge (\mathcal{Z}_n) heißt **Zerlegungsnullfolge**, wenn $d(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$.

Definition 7.21

Seien f, g auf $[a, b]$ definiert und reell. $\mathcal{Z} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ sei eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ein Zwischenpunktsystem.

Unter der **Zwischensumme** (Riemann-Stieltjes-Summe) von f bzgl. g zur Zerlegung \mathcal{Z} und dem Zwischenpunktsystem ξ versteht man die Summe

$$\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

f heißt über $[a, b]$ **R-integrierbar** bzgl. g , falls für jede Zerlegungsnullfolge (\mathcal{Z}_n) und beliebige ξ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{f,g}(\mathcal{Z}_n)$ existiert. Dieser Grenzwert heißt **Riemann-Stieltjes-Integral** (RS-

Integral) von f bzgl. g über $[a, b]$. Man schreibt $\int_a^b f(x) dg(x)$ oder kurz $\int_a^b f dg$.

Rechenregeln für Riemann-Stieltjes-Integrale

Wir setzen voraus, dass die jeweiligen Integrale existieren. Das Riemann-Stieltjes-Integral ist in f und g linear, also

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dg = \alpha_1 \int_a^b f_1 dg + \alpha_2 \int_a^b f_2 dg \quad \text{und} \quad \int_a^b f d(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 \int_a^b f dg_1 + \beta_2 \int_a^b f dg_2$$

(Dies folgt direkt aus der Definition, da die Zwischensummen ebenfalls in f und g linear sind.) Außerdem lässt sich das Integrationsintervall zerteilen: Für $a < c < b$ ist

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

Die partielle Integration kann analog formuliert werden: Wenn f bzgl. g integrierbar ist, dann auch g bzgl. f und es gilt

$$\int_a^b f(x) dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) df(x)$$

Beweis

Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein Zwischenpunktsystem von \mathcal{Z} . Wir formen die Zwischensummen um. Dazu bilden wir mit $\xi_0 := a$ und $\xi_{n+1} = b$ eine neue Zerlegung mit den Zwischenpunkten x_i bilden.

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] = - \sum_{k=0}^n g(x_k) [f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(b)f(b) - g(a)f(a) \quad (**)$$

Wenn (\mathcal{Z}_n) eine Zerlegungsnullfolge ist, dann bildet auch das zugehörige (\mathcal{Z}'_n) auch eine solche, da stets $d(\mathcal{Z}'_n) \leq 2d(\mathcal{Z}_n)$ gilt. Das heißt, beide Seiten von $(**)$ haben entweder gleichzeitig einen Limes oder nicht. Wenn der Limes existiert, gilt die angegebene Formel. ■

Rückführung von RS-Integralen auf normale Integrale

Sei $f \in R(a, b)$ und $g \in C(a, b)$ (es reicht auch die Existenz und Riemann-Integrierbarkeit von g' in $[a, b]$). Dann existiert $\int_a^b f dg$ und es ist

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Umgekehrt: Für $f \in R(a, b)$ und stetiges h lässt sich $\int_a^b f(x) h(x) dx$ als RS-Integral schreiben:

$$\int_a^b f(x) h(x) dx = \int_a^b f(x) dg(x) \text{ mit } g(x) = \int_a^x h(y) dy$$

Beweis

Wir zeigen den ersten Teil. Dazu seien \mathcal{Z}, ξ wie üblich definiert. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt (mit $\eta_k \in (x_{k-1}, x_k)$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n [f(\xi_k) - f(\eta_k)] g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n f(\eta_k) g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Links steht die Zwischensumme $\sigma_{f,g}(\mathcal{Z})$, rechts als zweiter Summand die Riemann'sche Zwischensumme $\sigma(fg', \mathcal{Z})$. Setze nun $M_k := \sup_{x \in [x_k, x_{k-1}]} f(x)$ und $m_k := \inf_{x \in [x_k, x_{k-1}]} f(x)$. Dann folgt aus obiger

Gleichung:

$$\begin{aligned} |\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}) - \sigma(fg', \mathcal{Z})| &= \left| \sum_{k=1}^n (f(\xi_k) - f(\eta_k)) g'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k) - f(\eta_k)| |g'(\eta_k)| (x_k - x_{k-1}) \leq c \cdot \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (x_k - x_{k-1}) =: r(\mathcal{Z}) \end{aligned}$$

Die letzte Summe entspricht der Differenz von Obersumme und Untersumme von f zur Zerlegung \mathcal{Z} . Da $f \in R(a, b)$, ist $r(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$ für jede Zerlegungsnullfolge (\mathcal{Z}_n) , d.h. $\sigma_{f,g}(\mathcal{Z}_n) - \sigma(fg', \mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$. ■

Fundamentalungleichung für Riemann-Stieltjes-Integrale

Für Riemannintegrale gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) (b - a)$$

Betrachte nun die Riemann-Stieltjes-Zwischensummen:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})] \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \quad (*)$$

Über die rechte Seite weiß man zunächst nichts. Damit führt (*) sozusagen zu einer neuen Klasse von Funktionen.

Definition 7.22

Eine Funktion g heißt **von beschränkter Variation** auf $[a, b]$, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass für jede Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$ gilt:

$$V(g, \mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M$$

Man nennt $V_a^b(g) := \sup_{\mathcal{Z}} V(g, \mathcal{Z})$ die **totale Variation** (Totalvariation) von g auf $[a, b]$.

Direkt aus der Abschätzung (*) erhält man den folgenden Satz.

Satz 7.23

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und g von beschränkter Variation auf $[a, b]$, sodass $\int_a^b f dg$ existiert. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \cdot V_a^b(g)$$

Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation ist groß: Alle Treppenfunktionen, alle monotonen Funktionen und alle stetig differenzierbaren Funktionen gehören dazu. Aber: Stetigkeit allein reicht nicht aus. Man kann zeigen: f ist von beschränkter Variation genau dann, wenn f als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellbar ist.

Beweis zur Beschränktheit der Variation monotoner Funktionen
Sei g (o.E.d.A.) monoton wachsend. Dann ist:

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{|g(x_k) - g(x_{k-1})|}_{>0} = \sum_{k=1}^n [g(x_k) - g(x_{k-1})] = g(b) - g(a) = V_a^b(g)$$

■

Satz 7.24 Existenzsatz für RS-Integrale

Wenn f stetig und g von beschränkter Variation auf $[a, b]$ ist, dann existieren $\int_a^b f dg$ und $\int_a^b g df$.

Bemerkung

- Für $g(x) = x$ mit $x \in [a, b]$ ist $\int_a^b f dg = \int_a^b f dx$ ein gewöhnliches Riemann-Integral.
- Für $g \equiv c$ auf $[a, b]$ ist $\int_a^b f dg = 0$.

Satz 7.25 Mittelwertsätze für RS-Integrale

1. (1. Mittelwertsatz) Wenn $\int_a^b f dg$ existiert und f auf $[a, b]$ beschränkt, dann gilt:

$$\exists \mu \in [\inf f, \sup f] : \int_a^b f dg = \mu [g(b) - g(a)] \quad (7.6)$$

Ist f stetig, dann existiert auf Grund des Zwischenwertsatzes ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f dg = f(c) [g(b) - g(a)]$$

2. (2. Mittelwertsatz) Ist f monoton wachsend und g stetig auf $[a, b]$, dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f dg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg$$

Beweis

1. Mit $m := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ und $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ folgt natürlich $m \leq f \leq M$.

$$\int_a^b m dg = m \int_a^b dg = m [g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq \int_a^b M dg = M [g(b) - g(a)]$$

Hieraus folgt (7.6) direkt für $\mu := \frac{\int_a^b f dg}{g(b) - g(a)}$.

2. Wende partielle Integration an:

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df$$

Auf das letztere Integral wenden wir den ersten Mittelwertsatz an und beachten die Stetigkeit von g .

$$\begin{aligned} \exists c \in [a, b] : \int_a^b g df &= g(c) [f(b) - f(a)] \\ \Rightarrow \int_a^b f dg &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c) [f(b) - f(a)] \\ &= f(a) \cdot \underbrace{[g(c) - g(a)]}_{=\int_a^c dg} + f(b) \cdot \underbrace{[g(b) - g(c)]}_{=\int_c^b dg} \Rightarrow (7.7) \end{aligned}$$



Nun können wir auch den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 7.12) zeigen. Dieser lautet (mit monotonem f und stetigem g):

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx$$

Beweis

Setze $G(x) := \int_a^x g(t)dt$. Da g stetig ist, ist $G(x)$ in (a, b) differenzierbar, denn $G' = g$. f ist monoton, also von beschränkter Variation auf $[a, b]$, also existiert $\int_a^b f dG$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f(x)G'(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x) \\ &= f(a)[G(c) - G(a)] + f(b)[G(b) - G(c)] = f(a) \int_a^c g(x)dx + f(b) \int_c^b g(x)dx \end{aligned}$$

■

Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion mehrerer Variablen, also $f = (f_1, \dots, f_n)^T$. Dann kann man über den Zugang zum Riemannintegral über Zwischensummen $\int_a^b f(t)dt$ erklären als

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt \right)^T$$

Also ist f R-integrierbar, wenn alle f_i ($i = 1, \dots, n$) R-integrierbar sind.

Satz 7.26

Dreiecksungleichung für Integrale

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Beweis

Seien $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und t'_i entsprechende Zwischenwerte. Die Zwischensumme ist von der Gestalt

$$\sigma_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m f(t'_i)(t_i - t_{i-1})$$

Aus beiden Seiten betrachten wir die Norm und wenden rechts die Dreiecksungleichung an:

$$\|\sigma_f(\mathcal{Z})\| = \left\| \sum_{i=1}^m f(t'_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|f(t'_i)(t_i - t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \|f(t'_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Betrachte nun eine Zerlegungsnullfolge (\mathcal{Z}_n) , also konvergiert auf der linken Seite

$$\sigma_f(\mathcal{Z}_n) \rightarrow \int_a^b f(t) dt$$

und aufgrund der Stetigkeit der Norm ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_f(\mathcal{Z}_n)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\mathcal{Z}_n) \right\| = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$$

Also konvergiert für \mathcal{Z}_n die rechte Seite gegen $\int_a^b \|f(t)\| dt$.



8 Kurvenintegrale

8.1 Wege und Kurven

Der Kurvenbegriff ist schwierig. Man möchte zwischen dem „geometrischen“ Gebilde Kurve und dem „Entstehungsweg“ unterscheiden.

Definition 8.1

1. Ein **Weg** (φ, I) in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I = [a, b]$). Die kompakte Bildmenge $C := \varphi(I)$ heißt **Spur** des Weges φ und φ heißt auch **Parameterdarstellung** von C . Der Weg heißt **geschlossen**, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$, d.h. Anfangs- und Endpunkt von C stimmen überein.
2. Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** (C^* -Kurve), wenn es einen injektiven (C^* -)Weg (φ, I) gibt, dessen Spur $\varphi(I) = C$ ist.
3. Eine Kurve C heißt **glatt** oder **regulär**, wenn es eine zugehörige stetig differenzierbare Parameterdarstellung (φ, I) gibt mit $\varphi'(t) \neq 0 \forall t \in I$. Dieser Weg heißt auch glatt bzw. regulär.

Bemerkung

1. Injektive Wege heißen auch **Jordanwege**, die zugehörigen Kurven **Jordankurven**. Man lässt bei geschlossenen Wegen und Kurven eine nicht injektive Stelle zu.
2. Wenn φ die Parameterdarstellung einer glatten Kurve ist, dann ist $\varphi'(t)$ der Tangentialvektor an C in $\varphi(t)$.
3. *Zusammensetzen von Kurven und Wegen:* Seien (φ_k, I_k) mit $k = 1, \dots, n$ gegebene Wege, sodass der Endpunkt von φ_l jeweils der Anfangspunkt von φ_{l+1} ist. Dann ist auf natürliche Weise ein Weg $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_n$ definiert. Für die zugehörigen Kurven C_k schreibt man $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n$. Meist kann man erreichen, dass φ auf einem Intervall $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$ definiert ist, die I_k keine inneren Punkte gemeinsam haben und φ insgesamt injektiv wird.
4. Ein Weg heißt **stückweise glatt**, wenn er bis auf endlich viele Punkte glatt ist. Dann kann man den Weg als Summe von glatten Wegen darstellen. Analog für die zugehörige Kurve.
5. Zur gleichen Kurve können natürlich viele (injektive) Wege gehören. Außerdem kann zu einer glatten Kurve durchaus eine nicht glatte Parameterdarstellung gehören.

Vereinbarung

Wir benutzen den Begriff des Weges (bzw. der Parameterdarstellung), falls nicht anders gesagt, immer im Sinne injektiver Wege bzw. Parameterdarstellungen.

Beispiel 8.1

1. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ mit $A \neq B$. Die Strecke \overline{AB} ist eine glatte Kurve mit der Parameterdarstellung:

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(t) = A + t(B - A)$$

2. Polygonzüge sind stückweise glatte Kurven.
3. Graphen von Funktionen sind Kurven. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Kurve $C = G(f) = \{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$ der Graph von f mit der Parameterdarstellung $\varphi(t) = (t, f(t))^T$.
4. Durch $t \mapsto (t \cos t, t \sin t)^T$ für $t > 0$ ist die **Archimedische Spirale** definiert.
5. Der geschlossene Weg $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)^T$ mit $I = [0, 2\pi]$ stellt den Einheitskreis dar.
6. $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t, h \cdot t)^T$ ist die Parameterdarstellung einer Schraubenlinie.
7. Die Zykloidenkurve mit der Parameterdarstellung $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$ ist nicht glatt, aber stückweise glatt.

Parametertransformation

Die gleiche Kurve kann verschiedene Parameterdarstellungen haben; das bedeutet anschaulich: C kann in unterschiedlichen Richtungen oder in verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen werden.

Definition und Satz 8.2

Seien (φ, I) und (ψ, J) zwei Parameterdarstellungen derselben Kurve C , d.h. $C = \varphi(I) = \psi(J)$. Dann existiert genau eine stetige und streng monotone Bijektion $h : J \rightarrow I$ mit $\psi = \varphi \circ h$. Sind φ, ψ glatt, dann ist h stetig differenzierbar und $h' \neq 0$. h nennt man dann auch **Parametertransformation** (zwischen den Parametrisierungen).

Zum Beweis setze $h := \varphi^{-1} \circ \psi$.

Die Menge aller Parameterdarstellungen (z.B. die stetig differenzierbaren) zerfällt in zwei Klassen. In jeder Klasse liegen alle diejenigen, für die das zugehörige h monoton wachsend ist ($h' > 0$). Für φ, ψ aus verschiedenen Klassen ist h monoton fallend ($h' < 0$).

Definition 8.3

Unter der **Orientierung** (bzw. dem Durchlaufsinne) von C versteht man die Festlegung auf eine dieser Äquivalenzklassen ($\varphi \sim \psi \Leftrightarrow h$ monoton wachsend), die man dann **positive Parameterdarstellungen** nennt. Entsprechend nennt man Parametertransformationen h mit $h' > 0$ **positiv**. Für $h' < 0$ spricht man von der **Änderung des Durchlaufsinns**.

Wenn man eine Parameterdarstellung (φ, I) hat, kann man daraus eine Parameterdarstellung (φ^-, I) erhalten, die den Durchlaufsinne ändert:

$$I = [a, b] \Rightarrow \varphi^-(t) = \varphi(a + b - t) \quad \begin{pmatrix} \varphi^-(a) = \varphi(b) \\ \varphi^-(b) = \varphi(a) \end{pmatrix}$$

Weg- und Kurvenlänge

Wir beginnen mit dem Begriff der Weglänge (nicht nur für injektive Wege). Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit den zugehörigen Punkten $x^{(i)} = \varphi(t_i)$ im \mathbb{R}^n . Die Idee ist, den Weg durch einen Polygonzug $P_{\mathcal{Z}}$ zu approximieren. Genauer: Der Weg wird auf $[t_i, t_{i+1}]$ durch diejenige Funktion angenähert, die die Strecke zwischen $x^{(i)}$ und $x^{(i+1)}$ beschreibt. Die Länge des Polygonzuges wird dann wie folgt definiert:

$$L(P_{\mathcal{Z}}) := \sum_{i=1}^r \left\| x^{(i)} - x^{(i-1)} \right\| = \sum_{i=1}^r \left\| \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \right\| \quad (8.1)$$

Definition 8.4

Unter der Länge $L(\varphi)$ eines Weges $(\varphi, [a, b])$ versteht man $L(\varphi) := \sup_{\mathcal{Z}} L(P_{\mathcal{Z}})$. Der Weg φ heißt **rektifizierbar**, wenn $L(\varphi) < \infty$.

Wir schreiben (8.1) ausführlich:

$$L(P_{\mathcal{Z}}) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})|^2}$$

Beachtet man die Abschätzung $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + \dots + |a_n|$, so gilt, wenn die Komponentenfunktionen φ_j von φ von beschränkter Variation sind:

$$\sum_{i=1}^r |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})| \leq L(P_{\mathcal{Z}}) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})|}_{\leq V_a^b(\varphi_j)} \quad \forall j \quad (*)$$

Satz 8.5

Der Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn alle Komponentenfunktionen von φ von beschränkter Variation sind.

Das bedeutet insbesondere: Stetig differenzierbare (also auch glatte) Wege sind stets rektifizierbar. Natürlich ist die Summe bzw. die Einschränkung rektifizierbarer Wege wieder rektifizierbar.

Weglängenfunktion

Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar. Definiere $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ wie folgt:

$$s(t) := \begin{cases} 0 & t = a \\ L(\varphi, [a, t]) = L(\varphi|_{[a, t]}) & t \in (a, b] \end{cases}$$

Das heißt, $s(t)$ ist die Länge des auf $[a, t]$ eingeschränkten Weges, insbesondere $s(b) = L(\varphi)$.

Satz 8.6

Eigenschaften der Weglängenfunktion

1. Ist $(\varphi, [a, b])$ rektifizierbar, dann ist s monoton wachsend und stetig. Für injektives φ ist s streng monoton wachsend.
2. Wenn φ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, dann ist s auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und es ist $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$. Also gilt:

$$s(t) = \int_a^t \|\varphi'(\tau)\| \, d\tau = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \dots + \varphi_n'(\tau)^2} \, d\tau$$

Insbesondere ist $L(\varphi) = s(b) = \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| \, d\tau$. Diese Formel gilt auch noch für stückweise stetig differenzierbare Wege: Für $\varphi = \varphi^{(1)} \oplus \dots \oplus \varphi^{(n)}$ ist $L(\varphi) = L(\varphi^{(1)}) + \dots + L(\varphi^{(n)})$.

Beweis

1. Die Monotonieaussagen lassen sich sehr leicht zeigen. Die Aussage über die Stetigkeit von s erfordert mehr Kenntnis über die Variation stetiger Funktionen.

Satz: Ist g auf $[c, d]$ stetig und von beschränkter Variation, dann ist $V_c^x(g)$ (die Variation von g auf $[c, x]$) eine stetige Funktion von x .

2. Zuerst bemerken wir: Für alle $[c, d] \subset [a, b]$ gilt natürlich $\underbrace{\|\varphi(d) - \varphi(c)\|}_{\text{Länge von } \overline{\varphi(c)\varphi(d)}} \leq L(\varphi|_{[c,d]})$. Dies nutzen

wir wie folgt: Sei $t \in (a, b)$ und $0 < h$ so, dass $t + h < b$. (Analog für $h < 0, t + h > a$.) Dann gilt:

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\| \leq (\text{s.o.}) \leq s(t+h) - s(t) \quad (8.3)$$

Behauptung: $\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \|\varphi'(t)\|$

Sei \mathcal{Z} eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Wende die Dreiecksungleichung für Integrale aus Satz 7.26 an.

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\varphi'(\tau)\| d\tau \\ \Rightarrow L(P_{\mathcal{Z}}) &= \sum_{k=1}^n \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \leq \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

Wir gehen zum Supremum über: $L(\varphi) \leq \int_a^b \|\varphi'(\tau)\| d\tau$, und wende die Betrachtungen auf $\varphi|_{[t, t+h]}$ an. Dann folgt:

$$\left\| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \right\| \stackrel{(8.3)}{\leq} \underbrace{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}}_{= \frac{1}{h} L(\varphi|_{[t, t+h]})} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\| d\tau \quad (8.5)$$

Wende den Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 7.12) mit $g \equiv 1$ und $f(\tau) = \|\varphi'(\tau)\|$ an:

$$\exists \xi = \xi(h), t \leq \xi(h) \leq t+h : \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\| d\tau = \frac{\|\varphi'(\xi(h))\|}{h} \int_t^{t+h} 1 d\tau = \|\varphi'(\xi(h))\|$$

Für $h \rightarrow 0$ geht $\xi(h) \rightarrow t$ und aus (8.5) folgt unter Beachtung der letzten Gleichung und Anwendung des Sandwichtheorems:

$$\|\varphi'(t)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \|\varphi'(t)\| \Rightarrow s'(t) = \|\varphi'(t)\|$$

■

Jetzt fragen wir: Was soll die Länge der Kurve C sein? Die Idee ist, eine Parameterdarstellung φ von C zu nehmen und die Länge von C gleich der Länge von φ zu *setzen*. Wie üblich muss man diese Definition rechtfertigen, d.h. hier die Unabhängigkeit der Länge von der Parameterdarstellung beweisen.

Definition und Satz 8.7

Sei φ eine beliebige Parameterdarstellung einer Kurve C . Unter der **Länge** von C versteht man $L(C) := L(\varphi)$ ($L(C)$ ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung). C heißt **rektifizierbar**, wenn $L(C) < \infty$.

Bemerkung

1. Statt eines Beweises: Hat man stetige Wege φ, ψ , die C beschreiben, so folgt $L(\varphi) = L(\psi)$ etwas mühsam über Zerlegungen und die Anwendung von Satz 8.3 über den Zusammenhang von φ und ψ über eine monotone Bijektion h . Es gilt stets: $L(\varphi) = L(\varphi^-)$ für beliebige Wege φ , also ist insbesondere die Länge einer Kurve unabhängig von ihrer Orientierung.
2. Die Länge einer Kurve wird in offensichtlicher Weise auf zusammengesetzte Kurven übertragen:

$$C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n \Rightarrow L(C) = L(C_1) + \dots + L(C_n)$$

3. Ist C stetig differenzierbar (d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung φ), dann gilt nach Satz 8.6:

$$L(C) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$$

Beweis

Zur Unabhängigkeit von der Parameterdarstellung für stetig differenzierbare φ

Sei $\psi = \varphi \circ h$ und $t = h(u)$, also ist $\frac{dt}{du} = h'(u)$ sowie $\psi(u) = \varphi(h(u)) = \varphi(t)$. Wir betrachten o.E.d.A. den Fall, dass h monoton wachsend ist, also $h' > 0$. Durch Substitution und mit der Kettenregel ist:

$$\Rightarrow \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_c^d \|\varphi'(h(u))\| \cdot h'(u) du$$

■

Bemerkung

4. Die Bogenlänge s wird häufig als „natürlicher“ Parameter bei der Parametrisierung von Kurven benutzt. Dies soll bedeuten: sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung von C . $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\varphi)]$ ist die stetig monoton wachsende und stetige Weglängenfunktion, die Umkehrfunktion zu $s = s(t)$ sei $t = t(s)$. Dann definiere eine neue Parameterdarstellung ψ von C : $\psi(s) := \varphi(t(s))$
 φ hat folgende Eigenschaften:
 - Ist σ die Weglängenfunktion zu ψ , dann $\sigma(s) = s$.
 - Falls φ stetig differenzierbar ist, dann auch ψ und es gilt $|\sigma'(s)| \equiv \|\psi'(s)\| = 1$, denn mit der Kettenregel folgt: $\varphi(t) = \psi(s(t)) \Rightarrow \varphi'(t) = \psi'(s(t)) \cdot s'(t)$

8.2 Weg- und Kurvenintegrale

Definition 8.8

Sei C eine rektifizierbare Kurve mit der Parameterdarstellung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und f eine auf C definierte reellwertige Funktion (i.A. ist f in einer Umgebung von C definiert). Unter dem **skalaren Kurven- oder Wegintegral** von f über C versteht man das folgende RS-Integral, falls es existiert:

$$\int_C f(x) ds := \int_a^b f(\varphi(t)) ds(t) \quad (8.6)$$

Im Falle einer C^1 -Kurve bzw. -Parameterdarstellung ist

$$\int_C f(x) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt \quad (8.7)$$

Man nennt $\|\varphi'(t)\| dt = ds$ das **skalare Bogenelement**.

Bemerkung

1. In der Regel ist f stetig. Dann existiert (8.6), da s monoton, also von beschränkter Variation, ist.
2. Man zeigt wieder: (8.6) ist unabhängig von der Parameterdarstellung und der Orientierung der Kurve.

Eigenschaften von skalaren Kurvenintegralen

Sei C rektifizierbar. Die RS-Integrale über f, g mögen existieren.

- $\int_C [\lambda f(x) + \mu g(x)] ds = \lambda \int_C f(x) ds + \mu \int_C g(x) ds$
- $\left| \int_C f(x) ds \right| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} |f(x)|$
- Integral über zusammengesetzte Kurven = Summe der Teilintegrale

Anwendungen

1. Die Gesamtmasse einer Kurve ergibt sich bei geg. Belegungsdichte ϱ zu $M = \int_C \varrho(x) ds$.
2. Sei C mit der Dichte ϱ belegt. Gesucht: Schwerpunkt $P = (P_1, \dots, P_n)^T$ der Kurve C .

$$p_i = \frac{1}{M} \int_C x_i \varrho(x_1, \dots, x_n) ds, \quad i = 1, \dots, n$$

3. Trägheitsmomente von Kurven

Beispiel 8.2

Gegeben sei ein Parabelstück $C: y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 1$. Diese sei mit Masse belegt: $\varrho(x, y) = y$. Gesucht: Gesamtmasse. Eine mögliche Parameterdarstellung ist $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = \sqrt{2x} (= y), 0 \leq x \leq 1$.

$$M = \int_C \varrho(x) ds = \int_0^1 y \sqrt{\varphi_1'(x)^2 + \varphi_2'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 2x} dx = \frac{1}{3} (\sqrt{27} - 1)$$

Jetzt sollen vektorielle Kurvenintegrale betrachtet werden.

Definition 8.9

1. Sei $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (nicht notwendigerweise injektiver) Weg und $F = (F_1, \dots, F_n)^T$ ein stetiges Vektorfeld. Unter dem **vektoriellen Wegintegral** von F (längs φ) versteht man folgendes RS-Integral:

$$\int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle = \int_{\varphi} (F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n) := \int_a^b \langle F(\varphi(t)), d\varphi(t) \rangle = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n F_i(\varphi(t)) d\varphi_i(t) \right]$$

Ist $\varphi \in C^1(I)$, d.h. φ ist stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle = \int_a^b \left[F_1(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + \dots + F_n(\varphi(t)) \cdot \varphi_n'(t) \right] dt$$

2. Sei (C, φ) eine *orientierte* Kurve. Dann versteht man unter dem **vektoriellen Kurvenintegral** von F (längs C) das Integral

$$\int_C \langle F(x), dx \rangle = \int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle$$

Bemerkung

Dieses RS-Integral kann man wieder als Grenzwert von Zwischensummen erhalten. Eine typische Zwischensumme sieht so aus: Sei $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit den Zwischenpunkten $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

$$\sigma_{F, \varphi}(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^r \langle F(\varphi(t'_j)), \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n F_k(\varphi(t'_j)) \cdot [\varphi_k(t_j) - \varphi_k(t_{j-1})] \quad (*)$$

Eigenschaften vektorieller Kurvenintegrale

1. Sind F, G stetige Vektorfelder auf C , dann $\int_C \langle \lambda F + \mu G, dx \rangle = \lambda \int_C \langle F, dx \rangle + \mu \int_C \langle G, dx \rangle$.

2. Integral über zusammengesetzte Kurven = Summe der Teilintegrale

3. $\left| \int_C \langle F, dx \rangle \right| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} \|F(x)\|$ – Dies sieht man aus (*), denn

$$\left| \sum_{j=1}^r \langle F(\varphi(t'_j)), \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) \rangle \right| \leq \sum_{j=1}^r |\dots| \leq (\text{CSU}) \leq \sum_{j=1}^r \|F(\varphi(t'_j))\| \cdot \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|$$

Das heißt, für alle Zwischensummen $\sigma_{F, \varphi}(\mathcal{Z})$ gilt

$$|\sigma_{F, \varphi}(\mathcal{Z})| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} \|F(x)\| \Rightarrow \left| \int_C \langle f(x), dx \rangle \right| \leq L(C) \cdot \sup_{x \in C} \|F(x)\|$$

4. *Orientierungsabhängigkeit* vektorieller Kurvenintegrale: Seien φ, ψ zwei äquivalente Parameterdarstellungen der gleichen Kurve. Dann gilt:

$$\int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle = \int_{\psi} \langle F(x), dx \rangle \quad \text{und} \quad \int_{\varphi^-} \langle F(x), dx \rangle = - \int_{\varphi} \langle F(x), dx \rangle$$

Beweis für C^1 -Parameterdarstellungen

Seien $\varphi : [a, b] \rightarrow C$, $\psi : [c, d] \rightarrow C$ und $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$, sodass $\psi = \varphi \circ h$, also $\psi(s) = \varphi(h(s))$. Mit der Substitutionsvariable $t = h(s)$ (da gleiche Orientierung, ist $h(c) = a$ und $h(d) = b$) ist $s = h^{-1}(t)$ und daher $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{h'(s)}$. Aus der Kettenregel folgt $\psi'(s) = \varphi'(h(s)) \cdot h'(s)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\psi} \langle F, ds \rangle &= \int_c^d \langle F(\psi(s)), \psi'(s) \rangle ds = \int_c^d \langle F(\varphi(h(s))), (\varphi(h(s)))' \rangle ds = (h(s) = t) \\ &= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \cdot h'(s) \rangle \cdot \frac{1}{h'(s)} dt = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_{\varphi} \langle F(x), ds \rangle \end{aligned}$$

■

5. *Zusammenhang vektorieller und skalarer Kurvenintegrale:* φ sei eine glatte Parameterdarstellung von C und F sei ein Vektorfeld. $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))^T$ ist der Tangentialvektor an C in $\varphi(t)$ und $\vec{t}(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ ist der Tangentialeinheitsvektor. Zudem ist $F_{\vec{t}}(x) := \langle F(x), \vec{t} \rangle$ die Tangentialkomponente von F und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\varphi/C} \langle F(x), dx \rangle &= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \left\langle F(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \right\rangle \underbrace{\|\varphi'(t)\| dt}_{=ds} \\ &= \int_a^b \langle F, \vec{t} \rangle ds = \int_a^b F_{\vec{t}} ds \end{aligned}$$

Die Orientierungsabhängigkeit steckt jetzt in $F_{\vec{t}}$ bzw. \vec{t} .

Beispiel 8.3

Berechnung der Arbeit A im Kraftfeld: $A = \int_{\varphi/C} \langle F(x), dx \rangle$

Vereinbarung: $\oint_C \langle F(x), dx \rangle$ heißt: C ist geschlossen und positiv orientiert.

8.3 Gradientenfelder und Wegunabhängigkeit

Beispiel 8.4 zur Motivation

Berechne die Integrale $J_k := \int_{\varphi_k} (y dx + (x - y) dy)$, $k = 1, 2, 3$ über folgende Wege und Kurven:

φ_1 : von $(0, 0)$ „geradlinig“ erst zu $(1, 0)$, dann zu $(1, 1)$

φ_2 : von $(0, 0)$ „geradlinig“ erst zu $(0, 1)$, dann zu $(1, 1)$

φ_3 : von $(0, 0)$ auf einer parabelförmigen Bahn zu $(1, 1)$

Das Integral J_1 wird berechnet (im Folgenden werden alle Parameterdarstellungen als $(x(t), y(t))$ geschrieben). Die Parameterdarstellung für φ_1 lautet für den ersten Abschnitt $x = t, y = 0, t \in [0, 1]$ und für den zweiten Abschnitt $x = 1, y = t, t \in [0, 1]$. Das Integral J_1 setzt sich also aus zwei Teilintegralen zusammen:

$$J_1 = \int_0^1 [0 \cdot 1 + (t - 0) \cdot 0] dt + \int_0^1 [t \cdot 0 + (1 - t) \cdot 1] dt = \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2}$$

Analog ergibt sich für die anderen Integrale ebenfalls $J_2 = J_3 = \frac{1}{2}$. (Die Parameterdarstellung für φ_3 ist: $x = t, y = t^2$.)

Nun berechne über dieselben Wege $I_k := \int_{\varphi_k} [y dx + (y - x) dy] \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{2}, I_2 = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{1}{6}$. Woran liegt das?

Definition 8.10

Sei $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ ein stetiges Vektorfeld in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. G ist offen und zusammenhängend).

- v heißt **Gradienten- oder Potentialfeld**, wenn ein skalares Feld U in G existiert, sodass $v = \text{grad } U$. U heißt **Stammfunktion** von v und $W := -U$ heißt **Potential** des Vektorfeldes v .
- Das Integral $\int_{\varphi} \langle v, dx \rangle$ heißt in G **wegunabhängig**, wenn für zwei beliebige Punkte $A, B \in G$ und jeden beliebigen in G verlaufenden stückweise glatten Weg φ das obige Integral denselben Wert hat. Symbolisch: $\int_{\varphi} \langle v, dx \rangle = \int_A^B \langle v, dx \rangle$. Eine äquivalente Formulierung ist: Jedes Integral über einen geschlossenen Weg $\oint_{\varphi} \langle v, dx \rangle = 0$. Vektorfelder v , für die $\int_{\varphi} \langle v, dx \rangle$ wegunabhängig ist, heißen **konservativ**.
- In völliger Analogie ergeben sich die Begriffe für Kurven.

Wann ist v ein Gradientenfeld und wann konservativ?

Satz 8.11

Wenn v ein Gradientenfeld ist, dann ist die Stammfunktion bis auf eine Konstante (also eine konstante Funktion in G) eindeutig bestimmt.

Satz 8.12

Ein stetiges Vektorfeld ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn es konservativ ist. Genauer:

1. Wenn $U \in C^1(G)$ (d.h. U ist in G stetig und besitzt stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung) und für beliebige $A, B \in G$ der Weg φ ein stückweise glatter Weg von A nach B ist, dann gilt:

$$\int_{\varphi} \langle \text{grad } U, dx \rangle = U(B) - U(A) \quad \left(\begin{array}{l} \Rightarrow \text{Gradientenfeld,} \\ \text{also konservativ} \end{array} \right)$$

2. v sei konservativ. Dann ist durch $U(x) := \int_A^x \langle v(y), dy \rangle$ (*)

mit einem beliebigen, festen $A \in G$ eine $C^1(G)$ -Funktion definiert, sodass gilt: $\text{grad } U = v$.

Beweis

1. Sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi(a) = A, \varphi(b) = B$. Mit der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \frac{dU(\varphi(t))}{dt} &= \frac{dU(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_j}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_j(t) = \langle \text{grad } U(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \\ \Rightarrow \int_{\varphi} \langle \text{grad } U(x), dx \rangle &= \int_a^b \langle \text{grad } U(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{dU(\varphi(t))}{dt} dt = U(B) - U(A) \end{aligned}$$

2. Ist das Integral wegunabhängig, dann ist die Funktion U durch den Stamm eindeutig definiert und man kann den Weg von A nach x beliebig wählen. Sei $x_0 \in G$ fest und h so klein, dass die gesamte Strecke $S = \overline{\varphi_0, \varphi_0 + h}$ mit der Parameterdarstellung $\varphi(t) = x_0 + th, t \in [0, 1]$ ganz in G liegt. Vorbetrachtung:

$$\int_{\varphi} \langle v(x_0), dy \rangle = \int_0^1 \left\langle v(x_0), \underbrace{\varphi'(t)}_{=h} \right\rangle dt = \langle v(x_0), h \rangle \int_0^1 dt = \langle v(x_0), h \rangle \quad (**)$$

Die Wegunabhängigkeit des Integrals liefert:

$$\begin{aligned} U(x_0 + h) - U(x_0) &= \int_A^{x_0+h} \langle v, dy \rangle - \int_A^{x_0} \langle v, dy \rangle = \int_{x_0}^{x_0+h} \langle v, dy \rangle \\ \frac{|U(x_0 + h) - U(x_0) - \langle v(x_0), h \rangle|}{\|h\|} &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\varphi} \langle v(y), dy \rangle - \int_{\varphi} \langle v(x_0), h \rangle \right| \\ &= \frac{1}{\|h\|} \left| \int_{\varphi} \langle v(y) - v(x_0), dy \rangle \right| \leq \frac{1}{\|h\|} \cdot \sup_{y \in S} \|v(y) - v(x_0)\| \cdot \underbrace{L(S)}_{=\|h\|} = \sup_{y \in S} \|v(y) - v(x_0)\| \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht für $h \rightarrow 0$ gegen Null, da v stetig ist. Also ist U an x_0 differenzierbar und $U'(x_0) = v(x_0)^T = (v_1(x_0), \dots, v_n(x_0))$. Daraus folgt die Behauptung $v = \text{grad } U$. ■

Satz 8.13

Sei v ein stetig differenzierbares Gradientenfeld in G . Dann erfüllt v folgende Integrierbarkeitsbedingungen in G :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \text{ mit } 1 \leq i, k \leq n \quad (\text{IB})$$

Beweis

Einfache Anwendung des Satzes von Schwarz:

$$v = \text{grad } U \Rightarrow v_j = \frac{\partial U}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

■

Bemerkung

Für $n = 3$ bedeutet (IB): $\text{rot } v = 0$. (IB) sind **notwendige**, nicht hinreichende Bedingungen für Gradientenfelder.

Beispiel 8.5

Sei $v(x, y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T$ in einem ringförmigen Gebiet um $(0, 0)$. Es gilt (IB): $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$, aber es gilt nicht immer $\oint \dots = 0$.

Definition 8.14

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

1. **wegweise zusammenhängend** (bogenzusammenhängend), wenn es für je zwei beliebige Punkte $A, B \in M$ einen Weg φ gibt, der ganz in M verläuft und der A und B verbindet.

$$\varphi : [a, b] \rightarrow M \text{ mit } \varphi(a) = A, \varphi(b) = B$$

2. **Gebiet**, wenn sie offen und (wegweise) zusammenhängend ist.
3. **einfach zusammenhängend**, wenn M zusammenhängend ist und jede ganz in M verlaufende geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne M zu verlassen.

Beispiel 8.6

Eine Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3 ist einfach zusammenhängend; die Oberfläche eines Torus ist zusammenhängend, aber nicht einfach.

Bemerkung

1. Letzteres ist eine sehr anschauliche Definition, exakte Formulierungen finden sich in der Literatur.
2. Man kann zeigen, dass die Begriffe „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ sind gleichwertig. (Ein metrischer Raum (M, d) heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht als Vereinigung zweier nichtleerer, offener und disjunkter Teilmengen schreiben lässt.)
3. Für den Begriff „einfach zusammenhängend“ gibt es Abschwächungen: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn gilt: $\exists S \in M : \forall A \in M : \overline{AS} \subset M$. M heißt **konvex**, wenn gilt: $\forall A, B \in M : \overline{AB} \subset M$. Offensichtlich folgt aus Konvexität Sternförmigkeit, und sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend. Der große Unterschied ist: Konvexität und Sternförmigkeit sind geometrische Eigenschaften, einfaches Zusammenhängen ist hingegen eine topologische Eigenschaft. (Das heißt, sie bleibt bei stetigen Abbildungen erhalten.)

Satz 8.15

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und v ein stetig differenzierbares Vektorfeld in G . Dann ist $\int_{\varphi} v$ genau dann wegunabhängig (also v konservativ), wenn (IB) erfüllt ist. (Für den speziellen Fall $n = 3$ bedeutet dies, dass $\operatorname{rot} v = 0$ in einfach zusammenhängenden Gebieten notwendig und hinreichend für die Konservativität von v ist.)

Beweis

Der Beweis ist sehr aufwändig, die allgemeine Form finden Sie in der Literatur (z. B. Wüst: Mathematik für Physiker). In der Regel wird der Satz für sternförmige G gezeigt. Sei o.E.d.A. G sternförmig bzgl. dem Ursprung O (d.h. $S = 0$). Sei weiterhin $x \in G$ beliebig und φ die geradlinige Verbindung von O nach x : $\varphi(t) = tx$ mit $t \in [0, 1]$. Setze

$$U(x) := \int_{\varphi} \langle v(y), dy \rangle = \int_0^1 \left\langle v(tx), \underbrace{\varphi'(t)}_{=x} \right\rangle dt$$

Wir zeigen $v = \operatorname{grad} U$. Es ist

$$\langle v(tx), x \rangle = v_1(tx)x_1 + \dots + v_n(tx)x_n \text{ mit } v_i(tx) = v_i(tx_1, \dots, tx_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle v(tx), x \rangle = v_1(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \cdot t \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_1}(tx) \stackrel{(IB)}{=} v_1(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \cdot t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i}(tx) = v_1(tx) + \langle \operatorname{grad} v_1(tx), tx \rangle$$

Außerdem gilt

$$\frac{d}{dt} (tv_1(tx)) = v_1(tx) + t \frac{d}{dt} v_1(tx) = v_1(tx) + \langle \operatorname{grad} v_1(tx), x \rangle$$

Also ist insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle v(tx), x \rangle = \frac{d}{dt} (tv_1(tx)) \quad (*)$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \int_0^1 \langle v(tx), x \rangle dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{d}{dx_1} \langle v(tx), x \rangle dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt} (tv_1(tx)) dt = [tv_1(tx)]_0^1 = v_1(x)$$

Bei (1) wurde von der Vertauschung von Grenzprozessen Gebrauch gemacht (siehe Kapitel 9.1). Völlig analog erhält man $\frac{\partial U(x)}{\partial v_k} = v_k(x)$. ■

9 Verschiedene Ergänzungen

9.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 9.1

Sei M eine nichtleere Menge (M kann eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n , ein metrischer Raum oder auch komplett beliebig sein) und (f_n) eine Folge komplexwertiger Funktionen, definiert auf M . Man sagt, (f_n) **konvergiert punktweise** gegen eine auf M definierte Funktion f (Schreibweise: $f_n \rightarrow f$), wenn $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in M$, das bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0, x \in M : \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) : \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Beispiel 9.1

1. Auf $M = [0, 1)$ $f_n(x) = x^n$ konvergiert $f_n \rightarrow 0$, d.h. $f \equiv 0$ auf M .

2. Auf $M = [0, 1]$ konvergiert $f_n \rightarrow f$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Die Grenzfunktion f ist (in $x = 1$) unstetig, obwohl alle f_n stetig sind. Das drückt sich als eine Verletzung der Vertauschung von Grenzprozessen aus:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-0} f_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Beispiel 9.2

Auf $M = \mathbb{R}$ konvergiert $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \rightarrow 0$, aber $f_n(x) = \cos(nx)$ konvergiert nicht, d.h. es gilt *nicht*:

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

Beispiel 9.3

Auf $M = (0, 1]$ sei f_n gegeben durch $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$. Also konvergiert f_n für alle x gegen Null. (Bei

$M = [0, 1]$ setze $f_n(0) = 0$.) Aber es ist $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \forall n$, das bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$

Wie man sieht, ist die punktweise Konvergenz für die Vertauschung von Grenzprozessen völlig ungeeignet. Man braucht einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 9.2

Seien M eine beliebige nichtleere Menge und f_n sowie f auf M definierte komplexwertige Funktionen. Man sagt, (f_n) **konvergiert gleichmäßig** auf M (Schreibweise: $f_n \Rightarrow f$) gegen f , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall x \in M, n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(Anders als bei der punktweisen Konvergenz muss n_0 hier von x unabhängig sein.)

Natürlich gilt: Wenn $f_n \Rightarrow f$, dann $f_n \rightarrow f$. Die Umkehrung ist falsch (siehe Beispiel 9.3).

Satz 9.3

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ oder ein metrischer Raum und (f_n) eine Folge stetiger komplexwertiger Funktionen auf M . Wenn (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f auf M konvergiert, dann ist f stetig. (Kurz: Die Stetigkeit bleibt bei gleichmäßiger Konvergenz erhalten.)

Beweis

Zu zeigen: Sei $x_0 \in M$ beliebig fest. f ist in x_0 stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in M : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Wähle $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument für die Stetigkeit und Konvergenz von f_n :

$$f_n \rightarrow f : \exists n_0 : \forall x \in M : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$f_n \text{ stetig: } \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

Mit der Dreiecksungleichung ist

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\| + \|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

■

Eine wichtige Folgerung ist dieses Theorem. Siehe dazu auch Satz 5.8.

Theorem 9.4 $C(K)$, topologischer Teil

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (oder ein kompakter metrischer Raum). Dann ist $C(K)$, die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf K , versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ($\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} \|f(x)\|$) ein vollständiger normierter Raum.

Bemerkung

$C(K)$ ist sogar eine C^* -Algebra. Dieser Begriff wird später definiert.

Beweis

In Kapitel 5.3 wurde gezeigt, dass $C(K)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist. Es bleibt noch die Vollständigkeit. Vorbetrachtung: Was bedeutet $f_n \rightarrow f$ mit der Supremumsnorm?

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty, \text{ also } f_n \Rightarrow f$$

Man sieht nun leicht: Wenn $f_n \Rightarrow f$, dann $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, denn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

Also ist die Konvergenz bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ gleichwertig mit der gleichmäßigen Konvergenz. Sei nun (f_n) eine $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0(\varepsilon) : \forall m, n \geq n_0 : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad (*)$$

Zu zeigen: Es existiert ein $f \in C(K)$ mit $f_n \Rightarrow f$. Wir finden einen Kandidaten für f mit

$$(*) \Rightarrow \forall m, n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (**)$$

Das heißt, die Zahlenfolge $(f_n(x))$ ist für jedes $x \in K$ eine Cauchyfolge in \mathbb{C} . Da \mathbb{C} vollständig ist, existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$. (f ist der punktweise Limes von f_n .) Es verbleibt:

1. $f_n \Rightarrow f$ – Dies sieht man aus $(**)$ mit $m \rightarrow \infty$: $\forall n \geq n_0, x \in K : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
2. $f \in C(K)$ – Da alle f_n stetig sind, ist nach 9.3 auch f stetig.

■

Satz 9.5

Seien $f_n \in R[a, b]$ und $f_n \Rightarrow f$. Dann ist $f \in R[a, b]$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Beweis

$f \in R[a, b]$ wird später gezeigt (siehe Lebesgue-Kriterium für die Integration von Funktionen mehrerer Variablen). Angenommen, wir wissen jetzt, dass $f \in R[a, b]$ ist.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \right) \cdot \int_a^b dx \leq (b - a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Also konvergiert $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Beim Vertauschen von Grenzwert und Ableitung gibt es eine Feinheit, zum Beispiel bei

$$f_n(x) = \underbrace{\frac{1}{n} \sin nx}_{\Rightarrow f=0} \quad \text{und} \quad f'_n(x) = \underbrace{\cos nx}_{\text{konv. nicht}}$$

Die Ableitungen f'_n müssen also auch konvergieren.

Satz 9.6

Sei (f_n) eine Folge von auf $[a, b]$ stetig differenzierbaren Funktionen, die punktweise gegen f konvergieren. Zudem konvergiere $f'_n \Rightarrow g$. Dann ist f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$, also insgesamt

$$\frac{d}{dx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Beweis

Da die f'_n stetig sind und gleichmäßig gegen g konvergieren, ist auch g stetig. Nach Satz 9.5 ist aufgrund der punktweisen Konvergenz der f_n :

$$\int_a^x g(t) dt = \int_a^x \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) \right] dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a)$$

Da g stetig ist, ist $\int_a^x g(t) dt$ nach x differenzierbar, also auch f und es ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x g(t) dt \right] = \frac{d}{dx} [f(x) - f(a)] \Rightarrow g(x) = f'(x)$$

Den folgenden Satz gibt es in vielen Varianten.

Satz 9.7

Ableitung eines Integrals nach einem Parameter

Sei $f = f(s, t)$ auf $Q := [a, b] \times [c, d]$ stetig und $F(s) := \int_c^d f(s, t) dt$ eine Funktion auf $[a, b]$. Auf Q möge $\frac{\partial f}{\partial s} =: g$ existieren und stetig sein. Dann ist F auf $[a, b]$ differenzierbar und $F'(s) = \int_c^d \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt$, insgesamt also

$$\frac{d}{ds} \int_c^d f(s, t) dt = \int_c^d \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt$$

Beweis

Sei $s_0 \in (a, b)$. Wende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an ($0 < \vartheta(h, t) < 1$).

$$\frac{F(s_0 + h) - F(s_0)}{h} = \int_c^d \frac{f(s_0 + h, t) - f(s_0, t)}{h} dt = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \vartheta h, t) dt$$

$$= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t) dt + \underbrace{\int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s_0 + \vartheta h, t) - \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t) \right] dt}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0}$$

Das existiert, dass die Ableitung $F'(s)$ existiert und es ist

$$F'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s_0 + h) - F(s_0)}{h} = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t) dt$$

■

9.2 Bemerkungen zur Variationsrechnung

Die Variationsrechnung ist ein sehr umfangreiches Gebiet; hier können nur einfachste Ideen erklärt werden. (Sehr ausführlich wird das Thema zum Beispiel im Fischer/Kaul, Band 3, behandelt.)

9.2.1 Beispiele und Problemstellungen

1. Im \mathbb{R}^n seien zwei Punkte A, B gegeben. Gesucht ist diejenige Kurve C , die die kürzeste Entfernung zwischen A und B realisiert. (Natürlich weiß man, dass \overline{AB} gesucht ist.) Mathematisch sagt man: Es sind stückweise stetig differenzierbare Verbindungskurven gesucht. Zur Vereinfachung betrachten wir $n = 2$ und suchen eine Kurve mit der Parameterdarstellung $(x, y(x))$ mit $x \in [a, b]$.

Dann muss die Länge der Kurve $l(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ minimal werden.

2. Johann Bernoulli löste 1696 das sogenannte *Brachistochrone-Problem*: Ein Massepunkt ruht in A , wird losgelassen und soll reibungsfrei in kürzester Zeit nach B gelangen. Gesucht ist die Form der Bahnkurve. Für die mathematische Formulierung sei o.E.d.A. $A = (0, 0)$ und $B = (x_0, y_0)$. Die Bahnkurve ist eine Funktion $y = y(x)$ mit $y(0) = 0$ und $y(x_0) = y_0$. Außerdem ist die Anfangsgeschwindigkeit $y'(0) = v(0) = 0$. Da die Energie erhalten bleiben muss, gilt

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} v^2 - mgy(x)$$

Da an $(0, 0)$ die Energie $E = 0$ ist, muss immer $E = 0$ gelten:

$$\frac{m}{2} v^2 = mgy(x) \Rightarrow v = \sqrt{2gy(x)}$$

Sei $s(x)$ die Bogenlänge des Kurvenstücks an $(0, 0)$ bis $(x, y(x))$, also

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2} d\xi$$

Andererseits ist $v = \frac{ds}{dt}$. Sei L die Gesamtlänge der Kurve und T die Gesamtdauer der Bewegung von A nach B .

$$T = T(y) = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_0^{x_0} \frac{1}{v} \frac{ds}{dx} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} dx$$

3. In der Mechanik wird ein physikalisches System mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung durch die Lagrangefunktion \mathcal{L} beschrieben.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

Hierbei sind die q_i die verallgemeinerten Koordinaten und die \dot{q}_i die verallgemeinerten Geschwindigkeiten des Systems. Die Bewegung verläuft so (d.h. die q_i sind so), dass die Wirkung $W(q_1, \dots, q_n)$ minimal wird.

$$W(q_1, \dots, q_n) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt$$

Im Allgemeinen hat man bei dieser gewissen Klasse von Variationsaufgaben eine C^2 -Funktion L auf einem Gebiet $\Omega_L \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^m$. Wir betrachten das folgende **Variationsintegral**:

$$\mathcal{L}(v) := \int_a^b L(x, v(x), v'(x)) dx = \int_a^b L(x, v, v') dx$$

auf der **Variations- oder Vergleichsklasse** V aller glatten Wege und Kurven

$$v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } v(a) = A \text{ und } v(b) = B$$

für welche das Variationsintegral existiert. Die Menge aller glatten Wege und Kurven wird mit $C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ oder, für $m = 1$, mit $C^1([a, b])$ bezeichnet. In V kann man zwei Normen einführen:

- $\|u\|_{C^0} := \sup_{x \in [a, b]} \|u(x)\| = \sup_{x \in [a, b]} \sqrt{u_1^2(x) + \dots + u_m^2(x)}$
- $\|u\|_{C^1} := \|u\|_{C^0} + \|u'\|_{C^0}$

Dann gilt offenbar ($\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$):

$$D(\mathcal{L}) = \{v : (x, v(x), v'(x)) \in \Omega_L \forall x \in [a, b]\}$$

Da v und v' jeweils m Koordinaten haben, ist es günstig, folgende Bezeichnungen einzuführen:

- für Punkte aus Ω_L : $(x, v_1(x), \dots, v_m(x), v'_1(x), \dots, v'_m(x)) =: (x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m)$
- $L_x := \frac{\partial L}{\partial x}$, $L_{y_k} := \frac{\partial L}{\partial y_k}$, $L_{z_l} := \frac{\partial L}{\partial z_l}$ mit $1 \leq k, l \leq m$
- $L_y := (L_{y_1}, \dots, L_{y_m})$ und $\nabla_y L := L_y^T$ (Gradient von L bzgl. der y -Koordinate)
- $L_z := (L_{z_1}, \dots, L_{z_m})$ und $\nabla_z L := L_z^T$
- $L_{yy} := (L_{y_k y_l})$, $L_{yz} := (L_{y_k z_l})$, $L_{zz} := (L_{z_k z_l})$
((m, m) -Matrizen aus den jeweiligen zweiten Ableitungen)

Wir definieren eine kompakte Formulierung für den folgenden Sachverhalt: v sei in einer hinreichend kleinen Umgebung von u bzgl. irgendeiner Norm $\|\cdot\|$: $\|v - u\| \ll 1$.

Definition 9.8

Ein Funktional $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer beliebigen Vergleichsklasse $V \subset D(\mathcal{L})$ besitzt an der Stelle $u \in V$ ein

1. **starkes lokales Minimum**, wenn $\mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(v) \forall v \in V$ mit $\|u - v\|_{C^0} \ll 1$
2. **schwaches lokales Minimum**, wenn $\mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(v) \forall v \in V$ mit $\|u - v\|_{C^1} \ll 1$

Jedes starke lokale Minimum ist auch ein schwaches lokales Minimum.

Nun suchen wir notwendige Bedingungen für das Vorliegen solcher lokaler Minima. Diese Bedingungen findet man durch folgendes Vorgehen (nach Euler): Zu jeder Variationsklasse $V = \{v \in D(\mathcal{L}) : v(a) = A, v(b) = B\}$ betrachten wir den sogenannten **Variationsvektorraum**

$$\delta V = \{\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$$

Die Elemente aus δV heißen **Variationsvektoren**. Die Idee beim Aufsuchen notwendiger Bedingungen besteht im Folgenden: Wenn an u ein lokales Minimum vorliegt, dann wird $\mathcal{L}(v)$ mit $\mathcal{L}(u)$ nicht für beliebige $v \in V$ verglichen, sondern es werden nur solche v berücksichtigt:

$$v = u + s\varphi \text{ mit } \varphi \in \delta V \text{ und } \|s\| \ll 1$$

Die Elemente $\varphi \in \delta V$ haben folgende Eigenschaften:

1. Für alle $v \in V$ und $s \in \mathbb{R}$ haben v und $v + s\varphi$ die gleichen Randwerte A und B :

$$v(a) = \underbrace{v(a)}_{=A} + s \underbrace{\varphi(a)}_{=0} = A \text{ und } v(b) = v(b) + s\varphi(b) = B$$

2. v und $v + s\varphi$ sind bzgl. der Normen $\|\cdot\|_{C^0}$ und $\|\cdot\|_{C^1}$ für $|s| \ll 1$ hinreichend benachbart, insbesondere gilt wieder $v + s\varphi \in V$.

Das sieht man folgendermaßen: Die Menge $K := \{(x, v(x), v'(x)) : x \in [a, b]\}$ ist eine kompakte Teilmenge der offenen Menge Ω_L . Dann liegt natürlich auch eine Umgebung von K in Ω_L (hier ohne Beweis), das heißt, es existiert ein $r > 0$ mit:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2m+1} : \|y - v(x)\| + \|z - v'(x)\| < r \forall x \in [a, b]\} \subset \Omega_L$$

Also ist $v + s\varphi \in D(\mathcal{L})$, falls $|s| \cdot (\|\varphi(x)\| + \|\varphi'(x)\|) < r \forall x \in [a, b]$, denn

$$\|v - (v + s\varphi)\|_{C^1} = \|v - (v + s\varphi)\|_{C^0} + \|v' - (v' + s\varphi')\|_{C^0} = |s| \cdot (\|\varphi\|_{C^0} + \|\varphi'\|_{C^0})$$

Bezüglich einer Minimumstelle u gilt also insbesondere $\mathcal{L}(u) < \mathcal{L}(u + s\varphi)$ und somit

$$\left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} \geq 0 \quad (*)$$

Achtung: (*) beinhaltet nur notwendige Bedingungen, da nicht alle Variationsvektoren berücksichtigt wurden. Hinreichende Bedingungen sind viel komplizierter! Keinesfalls reicht $\left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} > 0$. Im folgenden Satz werden die Ableitungen aus (*) ausgerechnet und mit Bezeichnungen versehen.

Satz 9.9

Sei $u \in V$ gegeben. Dann gilt für jedes $\varphi \in \delta V$ und alle s mit $|s| \ll 1$ (sodass $u + s\varphi \in V$):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(u)(\varphi) &:= \left. \frac{d}{ds} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} = \int_a^b [L_y(x, u, u')\varphi(x) + L_z(x, u, u')\varphi'(x)] dx \\ &= \int_a^b [\langle \nabla_y L, \varphi \rangle + \langle \nabla_z L, \varphi' \rangle] dx \quad (9.1) \end{aligned}$$

$$\delta^2\mathcal{L}(u)(\varphi) := \left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(u + s\varphi) \right|_{s=0} = \int_a^b [\langle \varphi, L_{yy}\varphi \rangle + 2\langle \varphi', L_{yz}\varphi \rangle + \langle \varphi', L_{zz}\varphi' \rangle] dx \quad (9.2)$$

Wenn $u \in V$ sogar zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt für alle $\varphi \in \delta V$:

$$\delta\mathcal{L}(u)(\varphi) = \int_a^b \left\langle \left(\nabla_y L - \frac{d}{dx} \nabla_z L \right), \varphi(x) \right\rangle dx \quad (9.3)$$

Bemerkung

In (9.1) bedeutet (mit dem Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^m)

$$L_y \cdot \varphi = (L_{y_1}, \dots, L_{y_m}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} L_{y_1} \\ \dots \\ L_{y_m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \nabla_y L, \varphi \rangle$$

Analog ist $L_z \cdot \varphi' = \langle \nabla_z L, \varphi' \rangle$. In (9.2) bedeutet

$$\langle \varphi, L_{yy}\varphi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix}, (L_{y_k y_l}) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_m \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(L_{y_k y_l})$ ist eine (m, m) -Matrix.

Die Linearform $\delta\mathcal{L}(u) : \delta V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \delta\mathcal{L}(u)(\varphi)$ heißt **erste Variation von \mathcal{L} an der Stelle u** , die quadratische Form $\delta^2\mathcal{L}(u) : \delta V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \delta^2\mathcal{L}(u)(\varphi)$ heißt **zweite Variation von \mathcal{L} an der Stelle u** . Es existieren verschiedene gleichwertige Symbole für die Variationen:

$$\delta\mathcal{L}(u)(\varphi) \equiv \delta\mathcal{L}(u, \varphi) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(u)$$

Letzteres ist besonders in der Physik beliebt.

Beweis

Zu Satz 9.9

Aus dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_a^b L(x, u + s\varphi, u' + s\varphi') dx &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} L(x, u + s\varphi, u' + s\varphi') dx \\ \frac{\partial}{\partial s} L(x, u + s\varphi, u' + s\varphi') &= \underbrace{L_{y_1} \cdot \varphi_1 + \dots + L_{y_m} \cdot \varphi_m}_{L_y \cdot \varphi} + \underbrace{L_{z_1} \cdot \varphi'_1 + \dots + L_{z_m} \cdot \varphi'_m}_{L_z \cdot \varphi'} \end{aligned}$$

Daraus folgt (9.1) und, durch nochmaliges Differenzieren, (9.2). Wende nun auf den zweiten Summanden in (9.1) partielle Integration an und beachte, dass $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$:

$$\int_a^b L_z \varphi' dx = \int_a^b (L_{z_1} \varphi'_1, \dots, L_{z_m} \varphi'_m) dx = \underbrace{[L_z \varphi]_a^b}_{=0} - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} L_z \right) \varphi dx \Rightarrow (9.3)$$

■

9.2.2 Euler-Lagrange-Gleichungen

Die Idee ist nun, die Variationsaufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung zurückzuführen. Aus (*), d.h. $\frac{d}{ds} \mathcal{L}(u + s\varphi)|_{s=0} = 0$, folgt der folgende Satz.

Satz 9.10

Jede starke oder schwache lokale Minimumstelle u von $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein stationärer (kritischer) Punkt, d.h. $\delta \mathcal{L}(u) = 0$.

Für die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen sind einige Vorbereitungen nötig: Unter einer **Testfunktion** auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine C^∞ -Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, deren **Träger**

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$$

kompakt ist und in Ω liegt.

Beispiel 9.4

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, dann ist $\text{supp } f = [0, 1]$.

Der Vektorraum aller Testfunktionen auf Ω wird mit $C_c^\infty(\Omega)$ bezeichnet. Entsprechend bezeichnet $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ den Vektorraum aller Testfunktionen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ mit $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ für $k = 1, \dots, m$. Es gibt beliebig viele „scharf lokalisierten“ Testfunktionen.

Satz 9.11

Zu jeder (offenen) Kugel $U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Testfunktion φ mit

$$\begin{aligned} \varphi &> 0 \text{ in } U_r(a) \\ \varphi &= 0 \text{ außerhalb } U_r(a) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (**)$$

Bemerkung

Da die Integration über \mathbb{R}^n noch nicht erklärt ist, soll die Normierungsbedingung lediglich zur Kenntnis genommen werden.

Beweis

Die Funktion ψ mit $\psi(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ für $t > 0$ und $\psi(t) = 0$ für $t \leq 0$ ist C^∞ auf \mathbb{R} . Bilde nun

$$\varphi : \varphi(x) = c \cdot \psi\left(r^2 - \|x - a\|^2\right), \quad c = \text{const.}$$

Es ist $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und φ erfüllt die erste und zweite Bedingung des Satzes, durch geeignete Wahl von c kann man auch die dritte erfüllen. ■

Satz 9.12 Fundamentallema der Variationsrechnung

Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ist $\int_\Omega f \cdot \varphi dx = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, so ist $f = 0$.

Beweis

Angenommen, es existiert ein $a \in \Omega$ mit $f(a) \neq 0$ (o.E.d.A sei $f(a) > 0$), so existiert aufgrund der Stetigkeit von f eine kugelförmige Umgebung $U_r(a)$ mit $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$ für alle $x \in U_r(a)$. Betrachte nun ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften (**) aus Satz 9.11. Das ergibt einen Widerspruch:

$$0 = \int_\Omega f \cdot \varphi dx = \int_{U_r(a)} f \cdot \varphi dx > \frac{1}{2}f(a) \int_{U_r(a)} \varphi dx = \frac{1}{2}f(a) > 0$$

■

Folgerung 9.13 Fundamentallema in der vektorwertigen Variante

Ist $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und ist $\int_\Omega \langle f, \varphi \rangle dx > 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so ist $f = 0$.

Beweis

Dieses Lemma erhält man direkt aus dem vorherigen, indem man für $k = 1, \dots, m$ die Funktion $\varphi = c\psi e_k$ wählt, wobei die e_k die Einheitsvektoren des \mathbb{R}^m in der k -ten Koordinatenrichtung sind. ■

Satz 9.14 Euler-Lagrange-Gleichungen

Eine C^2 -Kurve $u \in V$ liefert genau dann einen stationären Punkt von $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$, wenn u die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{Vektoriell: } \quad & \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial L}{\partial z_k} (x, u(x), u'(x)) \right] = \frac{\partial L}{\partial y_k} (x, u(x), u'(x)) \quad (ELG) \\ & \frac{d}{dx} [\nabla_z L(x, u, u')] = \nabla_y L(x, u, u') \end{aligned}$$

Jede Lösung von (ELG) heißt **Extremal** von \mathcal{L} oder L .

Beweis

Nach (*) und (9.3) gilt für alle Extremale $u \in C^2$ und $\varphi \in \delta V$:

$$\delta \mathcal{L}(u)(\varphi) = \int_a^b \left\langle \nabla_y L(x, u, u') - \frac{d}{dx} [\nabla_z L(x, u, u')] , \varphi \right\rangle dx = 0$$

Nach dem Fundamentallema der V. folgen daraus die Gleichungen (ELG). Die Umkehrung ist trivial. ■

Bemerkung

Die Euler-Lagrange-Gleichungen heißen oft nur Euler-Gleichungen und in der Mechanik nur Lagrange-Gleichungen (2. Art). Sie stellen notwendige Bedingungen für starke und schwache Maxima oder Minima. Hinreichende Bedingungen sind schwieriger. Meist ergibt sich die Hinlänglichkeit aber aus dem Kontext. Wir schreiben die ELG nochmals für $m=1$ auf und verwenden die meist übliche Schreibweise: Die Differentiation erfolgt nicht nach y und z , sondern nach u und u' :

$$\frac{d}{dx} L_{u'} = L_u$$

Die linke Seite bedeutet ausführlich (mit der Kettenregel):

$$\frac{d}{dx} L_{u'}(x, u(x), u'(x)) = L_{u'x} + L_{u'u}u' + L_{u'u'}u''$$

Einige Spezialfälle

Da wir in unseren Beispielen die Kurve (u) meist durch folgende Parameterkoordinaten beschreiben haben, d.h. durch x und $y(x)$, benutzen wir jetzt $L = L(x, y, y')$.

1. L hänge nicht explizit von y ab. Dann lauten die ELG:

$$\frac{d}{dx} L_{y'} = L_y \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow L_{y'}(x, y') = \text{const.}$$

Kann man diese Gleichung explizit nach y' auflösen, erhält man y durch Integration.

2. L hänge nicht explizit von y' ab. Dann lauten die ELG:

$$L_y = L_y(x, y(x)) = 0$$

Kann man explizit nach y auflösen, hat man die Darstellung der Extrema.

3. L hänge nicht explizit von x ab (Bsp.: physikalisches System ohne explizite Zeitabhängigkeit). Dann ist

$$L(y, y') = y' L_{y'}(y, y')$$

ein sogenanntes **erstes Integral** der ELG, d.h. eine Größe, die längs jeder Extremalen konstant ist.

Beweis

Zu zeigen ist, dass $\frac{d}{dx} (L - y' L_{y'}) = 0$ ist, wenn y eine Extremale ist, d.h. die ELG gelten.

$$\frac{d}{dx} (L - y' L_{y'}) = [L_y y' + L_{y'} y''] - [y'' L_{y'} + y' L_{yy} y' + y' L_{y'y'} y''] = y' \underbrace{[L_y - y' L_{yy} - y'' L_{y'y'}]}_{=(ELG)=0} = 0$$



Beispiel 9.5

Lösung des ersten Beispiels am Anfang des Kapitels

Suche ein Minimum von $\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2} dx$, also ist $L = \sqrt{1+y'^2}$. Nach dem Spezialfall 1 ist

$$\frac{d}{dx} L_{y'} = 0 \Rightarrow L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \stackrel{!}{=} c = \text{const.}$$

Auflösen nach y' ergibt eine Geradengleichung

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = c^2 \Rightarrow y' = d := \pm \sqrt{\frac{y'^2}{1+y'^2}} \Rightarrow y = dx + c$$

9.3 Umkehrabbildungen und implizite Funktionen

Problem 1

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m)^T : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben. Wann ist das eine eindeutige Abbildung, d.h. wann existiert f^{-1} mit $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$? Kann man die Ableitung $(f^{-1})'$ bestimmen, ohne f^{-1} explizit zu kennen?

Bemerkung

Zur Erinnerung

1. f sei eine Funktion einer Variablen. f^{-1} existiert, wenn $f' \neq 0$ ist. Die Ableitung ist $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.
2. $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine lineare Abbildung, gegeben durch eine Matrix \mathbf{A} . A^{-1} bzw. \mathbf{A}^{-1} existiert für $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Theorem 9.15

Satz über die lokale Umkehrbarkeit von Abbildungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ k -mal stetig differenzierbar. Für $x^0 \in G$ sei $f'(x^0)$ invertierbar, also

$$\det f'(x^0) = \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}(x^0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{x=x^0} \stackrel{!}{\neq} 0$$

Dann gilt:

1. Es existieren offene Umgebungen $U = U(x^0)$ und $V = V(y^0) = V(f(x^0))$, sodass f eine eindeutige Abbildung von U auf V ist. (f bildet U bijektiv auf V ab.)
2. Die Umkehrabbildung $g := (f|_U)^{-1}$ ist in V k -mal stetig differenzierbar und es gilt: Die Ableitung $g'(y)$ ist die zu $f'(x)$, genommen an $x = g(y)$ inverse Matrix: $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$

Den Beweis finden Sie in der Literatur (z.B. Harro Heuser, „Lehrbuch der Analysis, Teil II“).

Folgerung 9.16

Satz über die offene Abbildung

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Außerdem sei $f'(x)$ für alle $x \in G$ invertierbar. Dann ist $f(G)$ eine offene Menge. Ist f insgesamt eindeutig (nicht nur lokal wie im vorhergehenden Theorem), dann ist f ein **Diffeomorphismus**, d.h. f^{-1} ist auch stetig differenzierbar.

Beweis

zum ersten Teil

Nach Theorem 9.15 gibt es zu jedem x^0 zwei offene Umgebungen $U = U(x^0)$ und $V = V(f(x^0))$, die

durch f eindeutig aufeinander abgebildet werden. Also existiert zu jedem Punkt $y \in f(U)$ (d.h. $y = f(x)$!) eine Umgebung (nämlich V), die noch ganz in $f(G)$ liegt, denn $V = f(U) \subset f(G)$. Das bedeutet: $f(G)$ ist offen. ■

Bemerkung

zum zweiten Teil

In der Formulierung ist zu beachten: Aus den Vorgaben folgt zwar, dass f in jedem Punkt lokal invertierbar ist, nicht aber, dass f global invertierbar ist. Zum Beispiel ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ für alle x lokal eindeutig, aber nicht global.

Als Nächstes betrachten wir eine wichtige Anwendung des Theorems 9.15.

Problem 2

Betrachte $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Beispiele: } x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

Sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$. Ist M nichtleer? Im Beispiel (2) ja, im Beispiel (3) nein. Ist $M \neq \emptyset$, dann sieht man folgendes: Wenn man x (oder y) frei gewählt hat, dann kann man, um (1) zu erfüllen, das y (oder x) nicht mehr frei wählen. y hängt also von x ab. Kann man diese Abhängigkeit beschreiben? Genauer: Kann man (1) „nach y auflösen“?

Das soll bedeuten: Existiert eine Funktion f auf einem Intervall (a, b) , sodass $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist? Wo liegt das Problem? Betrachte die Gleichung (2). Natürlich ist $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, doch ohne zusätzliche Forderung ist es unmöglich, über das Vorzeichen zu entscheiden.

Es ist noch schlimmer: Sei $[-1, 1]$ in zwei disjunkte Mengen X_1 und X_2 zerlegt, d.h. $X_1 \cup X_2 = [-1, 1]$ und $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x \in X_1 \\ -\sqrt{1-x^2} & x \in X_2 \end{cases}$$

Dieses f erfüllt $x^2 + f(x)^2 = 1$, ist jedoch im Allgemeinen nicht stetig!

Präzisere Aufgabenstellung

Ist die Menge M wenigstens lokal der Graph einer (stetigen oder hinreichend oft differenzierbaren) Funktion, d.h. sei $(x_0, y_0) \in M$, gibt es dann eine Umgebung $U(x_0, f(x_0))$ mit $U \cap M = \text{Graph von } f$?

Heuristische Überlegung

Sei $(x_0, y_0) \in M$. Die Taylorentwicklung von F an (x_0, y_0) ergibt:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \text{Rest } R$$

Wir vernachlässigen R beachten $F(x_0, y_0) = 0$ und lösen $F(x, y) = 0$ nach y auf:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$$

Das gilt (lokal), wenn $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Um nun alles für allgemeine Abbildungen formulieren zu können, führen wir einige Bezeichnungen ein.

Seien $G \subset \mathbb{R}_x^p$ und $H \subset \mathbb{R}_y^q$ nichtleere, offene Mengen. $F : G \times H \rightarrow \mathbb{R}^q$ sei stetig differenzierbar. F besteht aus q Komponenten $F_i(x, y) = F_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$. Betrachte die Gleichung $F(x, y) = 0$, d.h. das (i.A. nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ F_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \end{aligned}$$

Wie kann man dieses Gleichungssystem „nach den y_1, \dots, y_q auflösen“?

Theorem 9.17 Satz über implizite Funktionen

Sei $F : G \times H \subset \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar und $(x^0, y^0) \in G \times H$ mit

1. $F(x^0, y^0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \equiv \frac{d(F_1, \dots, F_q)}{d(y_1, \dots, y_q)}(x^0, y^0)$ ist invertierbar

Dann existieren Umgebungen $U = U(x^0) \subset G$ und $V = V(y^0) \subset H$ und eine stetige Abb. $f : U \rightarrow V$ mit

1. $f(x^0) = y^0$ und $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in U$ (Die Nullstellenmenge von F innerhalb von $U \times V$ ist gerade der Graph von f .)
2. $f'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad (*)$

Bemerkung

Die f_i sind gerade die „ y_i nach der Auflösung“. Die Formel (*) erhält man mit der Kettenregel:

$$F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{\frac{dF}{dx}}_{F'} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{f'} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} f' = - \frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow f' = - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

Beweis

Das Konzept ist, das Theorem 9.15 auf eine geeignete Hilfsableitung anzuwenden. Sei

$$\Phi : G \times H \subset \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q} \text{ mit } \Phi(x, y) = (x, F(x, y))$$

Auf Φ könnte man 9.15 anwenden, da von \mathbb{R}^m auf \mathbb{R}^m ($m = p + q$) abgebildet wird. Nach der ersten Voraussetzung ist $\Phi(x^0, y^0) = (x^0, F(x^0, y^0)) = (x^0, 0)$. Für Φ zeigen wir nun die lokale Invertierbarkeit um (x^0, y^0) und bestimmen dazu die Ableitung an dieser Stelle. Da

$$\Phi = \Phi(x, y) = \Phi(x_1, \dots, x_p, F_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q), \dots, F_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)),$$

ist die erste Zeile von Φ' ein Spaltenvektor aus den Ableitungen der ersten Komponente von Φ , also x_1 , nach allen Variablen $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$. Die p -te Zeile besteht aus den Ableitungen der p -ten Komponente (x_p) nach allen Variablen. Für die $(p + 1)$ -te Zeile der Ableitung muss $F_1(\dots)$ abgeleitet werden und so weiter.

$$\Phi'(x, y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E_{pp} & & & & & 0 \\ \hline \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial x_p} & \frac{\partial F_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_{pp} & 0 \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{array} \right)$$

An (x^0, y^0) ist $\frac{dF}{dy}(x^0, y^0)$ invertierbar. Da auch E_{pp} , die $p \times p$ -Einheitsmatrix, invertierbar ist, ist Φ' insgesamt invertierbar. Damit gelten für Φ die Voraussetzungen des Theorems 9.15, also ist Φ in (x^0, y^0) lokal invertierbar und es existieren Umgebungen $U' = U'(x^0, y^0)$ und $V' = V'(\Phi(x^0, y^0)) = V'(x^0, 0)$, sodass Φ ein Diffeomorphismus von U' nach V' ist. Die Umkehrabbildung Φ^{-1} hat eine zu Φ analoge Struktur: Es existiert eine Abbildung $\Psi : V' \rightarrow \mathbb{R}^q$ mit

$$\Phi^{-1}(\xi, \eta) = (\xi, \Phi(\xi, \eta)) \quad \forall (\xi, \eta) \in V'$$

Damit erhält man für $(x, y) \in U'$:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \Phi^{-1}(x, 0) \Leftrightarrow y = \Psi(x, 0)$$

Insbesondere ist $y^0 = \Psi(x^0, 0)$. Da Φ stetig ist, existieren Umgebungen $U = U(x^0)$ und $V = V(y^0)$, sodass aus $x \in U$ folgt: $y = \Psi(x, 0) \in V$. Jetzt definieren wir $f : U \rightarrow V$ durch $f(x) := \Psi(x, 0)$, damit ist f stetig differenzierbar und $F(x, f(x)) = 0$. ■

Bemerkung

Theorem 9.17 ist schon „optimal“ formuliert: Man weiß aus den Bezeichnungen schon, nach welchen Variablen man auflösen kann.

Beispiel 9.6 Ausführliche Diskussion zu $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Die Ableitungen sind $F_x(x, y) = 2x$ und $F_y(x, y) = 2y$. Ist etwa $(x^0, y^0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, dann ist $F(x^0, y^0) = 0$ und $F_x(x^0, y^0)$ sowie $F_y(x^0, y^0) \neq 0$. Man kann also sowohl nach x als auch nach y auflösen: $x = \sqrt{1 - y^2}$ und $y = \sqrt{1 - x^2}$. An $(x^0, y^0) = (1, 0)$ ist $F_y(1, 0) = 0$ und $F_x(1, 0) \neq 0$, also muss man nach y auflösen.

9.4 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Wie kann man Kurven und Flächen im \mathbb{R}^3 beschreiben und dies auf geeignete Teilmengen, sogenannte Mannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n verallgemeinern? Wir gehen so vor, dass man den abstrakten Mannigfaltigkeitsbegriff leichter erlernen kann.

Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen. $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **regulär**, wenn Φ injektiv und differenzierbar ist und

$$\Phi'(t) = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

den Rang k hat. $\Phi^{-1} : \Phi(T) \rightarrow T$ ist stetig.

Definition 9.18

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, wenn folgendes gilt: Für jedes $a \in M$ existieren offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und ein Diffeomorphismus $\Psi : U \rightarrow V$, sodass gilt:

$$\Psi(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right) = \{y \in V : y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}$$

Hierbei ist 0_{n-k} das Nullelement des \mathbb{R}^{n-k} . Eine $(n-1)$ -dimensionale UM heißt **Hyperfläche**.

Bemerkung

1. Beachte: Der Rang von $\Psi'(x)$ ist n für alle $x \in U$.
2. Die Voraussetzung, dass Ψ ein Diffeomorphismus ist (denkbar wäre auch die Forderung nach einem Homöomorphismus, also einer in beiden Richtungen stetigen Abbildung), verhindert Pathologien.
3. Man kann für V o.E.d.A. ganz einfache Mengen nehmen, zum Beispiel Würfel, Kugeln oder auch den gesamten \mathbb{R}^n .

Beispiel 9.7 Graphen

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Graph $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$ eine eindimensionale UM des \mathbb{R}^2 . Zum Beweis setze $U = V = (a, b) \times \mathbb{R}$. Offenbar ist U eine offene Menge, die ganz $G(f)$ enthält. Setze

$$\Phi(x, y) = (x, y - f(x)) \Rightarrow \Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi'(x, y)$ ist stets invertierbar und es ist $\Phi^{-1}(s, t) = (s, t + f(s))$.

Allgemeiner: Sei $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar. Analog zum Spezialfall ist $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in U'\}$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Φ wird wie oben definiert und es ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -f'(x) & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die E_k Einheitsmatrizen im entsprechenden \mathbb{R}^k .

Beispiel 9.8 Einheitssphäre

$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ ist eine typische $(n-1)$ -dimensionale Untermannigf. des \mathbb{R}^n .

Satz 9.19 Weitere Charakterisierungen des Untermannigfaltigkeitsbegriffes

Sei $1 \leq k \leq n-1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. M ist eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .
2. [Beschreibung durch Gleichungen] M ist eine lokale Nullstellenmenge bzw. M ist lokal durch Nebenbedingungen definiert, d.h. für alle $a \in M$ existieren eine offene Umgebung $U = U(a)$ und $n-k$ stetig differenzierbare Funktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\} \quad \text{und} \quad \text{Rang} \frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = n - k$$

(Das heißt, keine der Gleichungen $f_i(x) = 0$ ist überflüssig.)

3. [Darstellung als Graph einer Abbildung] Für alle $a \in M$ gibt es (nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten) offene Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots, a_k)$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \rightarrow U''$ mit

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\} = \text{Graph}(g)$$

4. [Parameterdarstellung] Für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine offene Menge $T \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine reguläre Abbildung $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(T) = U \cap M (=: W)$$

Beispiel 9.9

Die Beschreibung durch Gleichungen kennt man aus der linearen Algebra.

1. Eine Ebene im \mathbb{R}^3 wird durch $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$ beschrieben, also ein $f_1 = f$.

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = (a_1, a_2, a_3)$$

Hierbei dürfen nicht alle a_1, a_2, a_3 gleichzeitig Null sein, damit $\text{Rang}(a_1, a_2, a_3) = 1$ ist.

2. Eine Gerade wird durch zwei Ebenengleichungen beschrieben und stellt damit den Schnitt zwischen den entsprechenden Ebenen dar:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \\ f_2(x) &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0 \\ \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Matrix muss den Rang 2 haben, sonst sind die Ebenen parallel (bzw. sogar identisch).

Definition 9.20

Seien T und Φ wie in Satz 9.19.4 definiert. Dann heißt (Φ, T) lokale Parameterdarstellung von M . Mit $\Psi := \Phi^{-1}$ (auf $W := M \cap U$) heißt (Ψ, W) **Karte** um a und die $(t_1, \dots, t_k) := \Psi(a)$ heißen **lokale Koordinaten** von a . Das Paar (Φ, T) heißt auch **lokales Koordinatensystem** von M um a . Ein System von Karten, das M überdeckt, heißt **Atlas** für M .

Beweis

für Satz 9.19

Aus 1. folgt 2.: Seien U, V und Ψ wie in Definition 9.18 erklärt. Setze $f := (\Psi_{k+1}, \dots, \Psi_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

$$M \cap U = \{x : f(x) = 0\} = \{x : \underbrace{f_1(x)}_{\Psi_{k+1}(x)} = \dots = \underbrace{f_k(x)}_{\Psi_n(x)} = 0\}$$

Da Ψ ein Diffeomorphismus ist, ist $\text{Rang } \Psi'(x) = n$, d.h. alle Zeilen von Ψ' sind linear unabhängig.

$$\text{Rang } f'(x) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} \Psi_{k+1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx_k} \Psi_{k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx_1} \Psi_n(x) & \cdots & \frac{d}{dx_k} \Psi_n(x) \end{pmatrix} = n - k$$

Aus 2. folgt 3.: Seien U und f wie in Satz 9.19.2 definiert, also $M \cap U = \{x : f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$.

Da $\text{Rang } f'(x) = n - k$, müssen $n - k$ Spalten linear unabhängig sein; o.E.d.A. seien dies die letzten $n - k$ Spalten. Betrachte folgende Aufteilung der Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$x' := (x_1, \dots, x_k) \quad \text{und} \quad x'' := (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$\frac{\partial (f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial (x_{k+1}, \dots, x_n)}$ ist eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann man nach den letzten $n - k$ Variablen auflösen, d.h. es existieren Umgebungen U' von a' und U'' von a'' und ein stetig differenzierbares $g : U' \rightarrow U''$ [d.h. $g = (g_1, \dots, g_{n-k})$ und $g_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$] mit $f(x', g(x')) = 0 \forall x' \in U'$.

$$(x', g(x')) \in M \cap U = M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) : x' \in U'\} = \text{Graph}(g)$$

Aus 3. folgt 4.: Seien U' und U'' wie in 9.19.3 definiert sowie $U := U' \times U''$ und $T := U'$. Setze $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x') := (x', g(x')) = \text{Graph}(g) = M \cap U$$

Aus 4. folgt 1.: Dies ist die komplizierteste Implikation. Mehr auf einem der nächsten Übungsblätter. ■

Bemerkung

In 9.19.2 bedeutet Rang $f' = n - k$ gerade, dass die Gradienten der f_j linear unabhängig sind.

Beispiel 9.10

1. $M = S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ ist natürlich die Nullstellenmenge einer einzigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = U \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n-k}$ mit $k = n - 1$ mit $f(x) = \|x\|^2 - 1$.
2. Seien $0 < r < R$ fest gewählt. $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = \left((R + r \cos \vartheta) \cos \varphi, (R + r \cos \vartheta) \sin \varphi, r \sin \vartheta \right)$$

mit $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]$. (Aus Periodizitätsgründen reicht das.) Das entspricht (bei geeigneter Einschränkung von φ und ϑ) einer lokalen Parameterdarstellung eines Torus. Dieser Torus entsteht durch Rotation der Kreislinie

$$\mathbb{R} \ni \vartheta \mapsto (x(\vartheta), z(\vartheta)) = (R + r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

um die z -Achse. Wenn in der (x, z) -Ebene eine Kurve durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(u)$ und $z = \psi(u)$ mit $\varphi(u) \leq 0$ und $\alpha \leq u \leq \beta$ gegeben ist und diese um die z -Achse rotiert, dann beschreibt jeder Kurvenpunkt einen Kreis mit dem Radius $\varphi(u)$. Also erhält man als „Parameterdarstellung“ der Rotationsfläche:

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = \psi(u) \quad \begin{pmatrix} 0 \leq v \leq 2\pi \\ \alpha \leq u \leq \beta \end{pmatrix}$$

Wir formulieren eine wichtige Eigenschaft von Untermannigfaltigkeiten, die eine wesentliche Grundlage für eine allgemeine Mannigfaltigkeitsdefinition bildet.

Satz 9.21 Parametertransformation und Kartenwechsel

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und (W_1, Ψ_1) sowie (W_2, Ψ_2) zwei Karten um $a \in M$ mit $W := W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Dann sind die Bilder $S_i := \Psi_i(W)$ offene Teilmengen der jeweiligen $T_i := \Psi_i(W_i)$ und $\tau := \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$ ist ein Diffeomorphismus. (Entsprechend übertragen sich auch höhere Differenzierbarkeitseigenschaften von Ψ_1 und Ψ_2 auf τ .) Die Abbildung τ heißt **Kartenwechsel**.

Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten

Wir benötigen im Folgenden Kurven(stücke) auf M durch $a \in M$. O.E.d.A. sei so ein Kurvenstück durch $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ gegeben, wobei $\alpha(0) = a$ ist.

Definition 9.22

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M im Punkt a , wenn es eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ gibt mit $\alpha(0) = a$ und $\alpha'(0) = v$. Die Menge aller dieser Tangentialvektoren wird mit $T_a(M)$ bezeichnet und heißt **Tangentialraum** an M im Punkt a .

Ein **Normalenvektor** von M in a ist ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_a(M)$ (unter Verwendung des Standardskalarproduktes in \mathbb{R}^n). Die Menge aller Normalenvektoren an M im Punkt a heißt $N_a(M)$.

Satz 9.23 Eigenschaften des Tangential- und des Normalraumes

Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $a \in M$. Dann gilt:

1. $T_a(M)$ ist ein k -dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^n . Eine Basis für $T_a(M)$ erhält man so: Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ und $\Phi : T \rightarrow M$ (vgl. Satz 9.19.4) mit $\Phi(c) = a$ ein lokales Koordinatensystem für M um a . Dann bilden die Vektoren $\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c)$ eine Basis von $T_a(M)$.
2. $N_a(M)$ ist ein $(n - k)$ -dimensionaler Vektorraum. Eine Basis für $N_a(M)$ erhält man so: Sei $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar und $a \in M \cap U$, sodass (vgl. Satz 9.19.2) $M \cap U = \{x : f(x) = 0\}$ und $\text{Rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = n - k$. Dann bilden die Vektoren $\text{grad } f_j(a)$ mit $1 \leq j \leq n - k$ eine Basis für $N_a(M)$.

Bemerkung

$N_a(M)$ ist per Definition trivialerweise ein Vektorraum. Man sieht aber zunächst überhaupt nicht, dass $T_a(M)$ ein VR ist.

Beweis

Setze $V := \text{lin} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c) \right\}$ und $W := \text{lin} \{ \text{grad } f_j(a) : 1 \leq j \leq n - k \}$, also ist $\dim V = k$ und $\dim W = n - k$. Wir zeigen: $V \subset T_a(M)$ und $W \subset N_a(M)$ – Dann folgt aus Dimensionsgründen und mit $W \perp V$ die Gleichheit der jeweiligen Mengen.

1. Sei $v \in V$, d.h. $v = \sum_{i=1}^k d_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}(c)$. Definiere folgende Kurve

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, s \mapsto \Phi(c + (d_1, \dots, d_k)s) = \Phi(c_1 + d_1s, c_2 + d_2s, \dots, c_k + d_k s)$$

Also ist α ein Geradenstück um c . Die Kettenregel liefert:

$$\alpha'(0) = \underbrace{\sum_{i=1}^k d_i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}}_{=v} \Rightarrow v \in T_a(M)$$

2. $N_a(M)$ ist ein Vektorraum. Wir zeigen, dass alle $\text{grad } f_j(a)$ in $N_a(M)$ liegen, also $W \subset N_a(M)$ gilt. Sei $v \in T_a(M)$ und $v = \alpha'(0)$ für eine geeignete Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = a$.

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : f(\alpha(t)) = 0 \Rightarrow f_j(\alpha(t)) = 0$$

Daraus folgt

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f_j(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\alpha(0)) \cdot \alpha'_i(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot v_i = \langle \text{grad } f_j(a), v \rangle$$

Da $v \in T_a(M)$ beliebig gewählt werden kann, ist $\text{grad } f_j(a) \in N_a(M)$.

■

9.5 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Beispiel 9.11

Gesucht ist der Punkt (x^0, y^0) auf der Geraden $y - x - 1 = 0$, der von $(0, 0)$ den geringsten Abstand hat. Benutzt man das Quadrat des Abstandes, so soll $x^2 + y^2$ minimal werden (man schreibt $x^2 + y^2 \rightarrow \text{Min.}$). Man formuliert eine Nebenbedingung: $g(x, y) := y - x - 1 = 0$. Dieses kann man nach y auflösen: $y = x + 1$ wird dann in $f(x)$ eingesetzt:

$$x^2 + (x + 1)^2 \rightarrow \text{Min.}$$

Dies ist eine Extremwertaufgabe für Funktionen einer Variablen mit der Lösung $x = -\frac{1}{2}$ (und $y = \frac{1}{2}$).

Im Allgemeinen hat man Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Menge $M := \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$. Am Punkt $(x^0, y^0) \in G$ liegt ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ vor, wenn es eine Umgebung $U(x^0, y^0)$ gibt, für die gilt:

$$\forall (x, y) \in G \cap M \cap U : \begin{cases} f(x, y) > f(x^0, y^0) & \text{(lokales Minimum)} \\ f(x, y) < f(x^0, y^0) & \text{(lokales Maximum)} \end{cases}$$

Die Umgebung $U(x^0, y^0)$ ist dabei so gewählt, dass sie ganz in G liegt.

Allgemeine Problemstellung

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^m \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k < m$) seien stetig differenzierbar. Gesucht ist ein lokales Extremum von f unter der Bedingung $g = 0$, d.h. in der Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m : g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq k\}$$

Satz 9.24

Lagrange'sche Multiplikatorenregel

Seien f und g wie oben definiert. Zusätzlich gelte $\text{Rang} \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x) = k \quad \forall x \in G$.

Angenommen, f hat in $c \in G$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dann existiert ein $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ mit

$$f'(c) = \sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(c) \quad (1)$$

Die λ_j heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

Bemerkung

1. Die Rangbedingung besagt, dass M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m ist.
2. Zur Bestimmung einer möglichen Extremalstelle hat man gemäß diesem Satz also $m+k$ Gleichungen für die Unbekannten $c_1, \dots, c_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ zu lösen:

$$g_i(c) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_l}(c) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_l}(c) \quad (l = 1, \dots, m)$$

Beweis

Sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine beliebige Kurve mit $\alpha(0) = c$. Als Funktion von t betrachtet, hat $f(\alpha(t))$ an $t = 0$ lokales Extremum, also verschwindet dort $f'(\alpha(t))$. Mit der Kettenregel ist

$$0 = f'(\alpha(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{df}{dx_i} \underbrace{(\alpha'(0))}_c \cdot \underbrace{\alpha'_i(0)}_{\text{Tangentenvektor an } c}$$

$$f\left(\underbrace{\alpha_1(t)}_{=x_1}, \dots, \underbrace{\alpha_m(t)}_{=x_m}\right) = \langle \text{grad } f(c), \alpha'(0) \rangle \Rightarrow \text{grad } f(x) \perp T_c(M) \Rightarrow \text{grad } f(x) \in N_c(M)$$

Vorgehensweise

Definiere eine Hilfsfunktion $H = f - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j$. Dann sucht man ein lokales Extremum von H als Funktion von $m + k$ Variablen $(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, also betrachtet man $\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0$ und $\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = 0$.

Beispiel 9.12

Sei $A = (a_{ij})$ eine symm. (n, n) -Matrix und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

Gesucht ist nun das Maximum von f auf der Einheitskugel, also $g(x) = 1 - \|x\|^2 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$. Damit ist

$$H(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Extremum an (x^0, λ) lauten:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x^0, \lambda) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 + 2\lambda x_i^0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^0, \lambda) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^{0,2} = 0$$

Die letzte Gleichung ist gerade $g(x) = 0$. Fasst man die ersten n Gleichungen zusammen, so folgt $2Ax^0 - 2\lambda x^0 = 0$ und damit $Ax^0 = \lambda x^0$. Das Maximum tritt also an einem (normierten) x^0 auf, das der Eigenvektor zum größten Eigenwert der Matrix A ist.

Bemerkung

zu hinreichenden Bedingungen

Ohne Nebenbedingungen: Betrachte die Hessematrix zu f , also $f''(x^0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right)$.

f hat an x^0 ein Minimum (Maximum), wenn die Matrix $f''(x^0)$ positiv (bzw. negativ) definit ist, also gilt:

$$\langle v, f''(x^0)v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Mit Nebenbedingungen: An $c \in M$ liegt ein lokales Minimum (Maximum) vor, wenn gilt:

- (notwendig) $\text{grad } H(c) = 0$
- (hinreichend) $H''(c)$ ist auf $T_c(M)$ positiv (negativ) definit.

10 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen

10.1 Definition des Riemannintegrals im \mathbb{R}^n

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (der Einfachheit halber werden alle x in Zeilen geschrieben). Ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ wird durch feste $a_i < b_i$ mit $1 \leq i \leq n$ wie folgt definiert:

$$I := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \text{und} \quad |I| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist der elementargeometrische **Inhalt** (bzw. das Volumen) von I . Dieser hängt nicht davon ab, ob man abgeschlossene oder offene Intervalle betrachtet. Wir betrachten **Zerlegungen** \mathcal{Z} von Intervallen I , aber nur solche der Form:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_n$$

Hierbei ist \mathcal{Z}_i eine Zerlegung von $[a_i, b_i]$. Also haben die Elemente von \mathcal{Z} die Form

$$J = J_1 \times \dots \times J_n \quad \text{mit} \quad J_i \in \mathcal{Z}_i$$

Die Zerlegungsintervalle von \mathcal{Z} werden von I_1 bis I_k durchnummeriert. I_i und I_j haben für $i \neq j$ keine innere Punkte gemeinsam. Dann gilt:

$$I = \bigcup_{j=1}^k I_j \quad \text{und} \quad |I| = \sum_{j=1}^k |I_j|$$

Die **Feinheit** von \mathcal{Z} wird als

$$d(\mathcal{Z}) = \max_{1 \leq j \leq k} d(I_j)$$

definiert. Hierbei ist $d(I_j)$ der **Durchmesser** von I_j , das ist, der maximale Abstand zweier Punkte aus I_j , also die Länge der Raumdiagonale. Eine **Zerlegungsnullfolge** ist eine Zerlegungsfolge \mathcal{Z}_n mit $d(\mathcal{Z}_n) \rightarrow 0$. Ein **Zwischenpunktsystem** zu \mathcal{Z} ist

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k) \quad \text{mit} \quad \xi^i \in I_i$$

f sei nun eine reellwertige Funktion mit $D(f) \supset I$. Die **Zwischensumme** von f zur Zerlegung \mathcal{Z} mit dem Zwischenpunktesystem ξ ist

$$\sigma(f, \mathcal{Z}, \xi) = \sum_{j=1}^k f(\xi^j) |I_j|$$

Definition 10.1 Riemann-Integral

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein (kompaktes) Intervall. Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf I **Riemann-integrierbar**, wenn für jede Zerlegungsnullfolge $(\mathcal{Z}^{(k)})$ (und zugehörige Zwischenpunktsysteme $(\xi^{(k)})$) gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(f, \mathcal{Z}^{(k)}) \text{ existiert}$$

Dieser Grenzwert heißt **Riemann-Integral** von f über I und wird mit

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = \int_I f(x) dx$$

bezeichnet. Die Menge aller auf I R-integrierbaren Funktionen wird mit $R(I)$ bezeichnet.

Bemerkung

Die Definition des R-Integrals über Ober- und Untersummen ist möglich, aber mühsamer.

Definition 10.2

1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ hat das n -dimensionale **Lebesgue-Maß** (L-Maß) Null, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele Intervalle $I_j \subset \mathbb{R}^n$ existieren, sodass gilt: $M \subset \bigcup I_j$ (d.h. die I_j bilden eine Überdeckung von M) und $\sum_j |I_j| < \varepsilon$. M heißt **Nullmenge**.
2. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Man sagt, eine Eigenschaft P gilt **fast überall** in E , wenn die Menge der $x \in E$, für die P nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Bemerkung

1. „fast überall“ (f.ü.) ist jetzt anders als beim eindimensionalen R-Integral definiert.
2. Im maßtheoretischen Sinne sind Nullmengen „kleine Mengen“.
3. Im Sinne der Definition 10.2.2 bedeutet „ f ist in I überall stetig“, dass es eine Nullmenge $M \subset I$ gibt, sodass f auf $I \setminus M$ stetig ist. **Vorsicht:** Wenn I ein Intervall und $M \subset I$ eine Nullmenge ist, dann muss dazu keineswegs eine Funktion f existieren, die auf $I \setminus M$ stetig und auf M unstetig ist.

Beispiel 10.1 Alle endlichen und alle abzählbaren Teilmengen von \mathbb{R}^n sind Nullmengen.

Sei $\{x_n \in \mathbb{R}^n : n \in \mathbb{N}\}$ die abzählbare Menge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle für jedes x_n ein Intervall I_n mit $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_j I_j \quad \text{und} \quad \sum_j |I_j| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon$$

Beispiel 10.2 Natürlich gibt es viele überabzählbare Nullmengen.

Ein Teilstück der x -Achse im \mathbb{R}^2 , $[a, b] \times \{0\}$ hat das zweidimensionale Lebesgue-Maß Null, jedoch nicht das eindimensionale. Sei $I = [a, b] \times [-\delta, \delta] \supset [a, b]$. Der Inhalt ist $|I| = 2\delta(b-a) < \varepsilon$ für $\delta < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Auch die x -Achse als Teilmenge des \mathbb{R}^n hat das L-Maß Null. Es gibt auch überabzählbare Nullmengen im \mathbb{R}^1 .

Beispiel 10.3 Graphen von Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph $G(f) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

Satz 10.3 Kriterium von Lebesgue

f ist auf I genau dann R-integrierbar, wenn f beschränkt und auf I fast überall stetig ist.

Beweis

Dieser Beweis ist sehr länglich. Sie finden ihn auf der Webseite von Prof. Timmermann. ■

Damit sind alle stetigen Funktionen sowie beschränkte Funktionen mit nur abzählbar vielen Unstetigkeiten Riemann-integrierbar.

Wie geht man von Intervallen zu allgemeinen Teilmengen des \mathbb{R}^n als Integrationsbereichen über? Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, also existiert ein Intervall I mit $B \subset I$. Sei f auf B definiert. Wir setzen f auf I durch $f(x) = 0$ für $x \in I \setminus B$ fort und definieren mit der charakteristischen Funktion χ_B des Intervalls B :

$$\int_B f(x) dx := \int_I (f \cdot \chi_B)(x) dx \quad \text{mit} \quad (f \cdot \chi_B)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \in I \setminus B \end{cases}$$

f und χ_B müssten also fast überall auf I stetig sein. f sei auf B fast überall stetig. Beim Übergang zu $f \cdot \chi_B$ können genau am Rand ∂B von B neue Unstetigkeitsstellen dazukommen. Das dürfen nicht zu viele sein! Daher ist folgende Definition plausibel.

Definition 10.4

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zulässig**, wenn B beschränkt ist und der Rand ∂B eine Nullmenge des \mathbb{R}^n ist.

Beispiel 10.4

1. Alle gängigen Figuren im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 (Kreise und Kugeln, Quadrate und Quader u.s.w.) sind zulässig.
2. Eine wichtige Klasse zulässiger Mengen ist folgende: Seien $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Intervall und $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Menge $B = \{(x, z) : x \in I, f_1(x) \leq z \leq f_2(x)\}$ zulässig.
3. $B = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1 \wedge x, y \in \mathbb{Q}\}$, die Menge der rationalen Punkte im Einheitskreis ist nicht zulässig, denn der Rand von B (die Menge aller Punkte, für die in jeder Umgebung sowohl Punkte von B als auch aus $\mathbb{R}^2 \setminus B$ liegen) ist das Einheitsquadrat.

Lemma 10.5

Die Vereinigung, der Durchschnitt und die Differenz endlich vieler zulässiger Mengen sind wieder zulässig.

Wir vereinbaren folgende Schreibweise: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge mit der charakteristischen Funktion χ_B . f sei auf B definiert. Dann setzen wir

$$(f \cdot \chi_B)(x) = f(x) \cdot \chi_B(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

$f \cdot \chi_B$ steht also für diejenige Funktion, die f auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzt, indem man außerhalb von B die Funktion zu Null macht.

Definition 10.6

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und f auf B definiert. Unter dem R-Integral von f über B versteht man

$$\int_B f(x) dx := \int_I (f \cdot \chi_B)(x) dx,$$

falls das rechtsstehende Integral existiert. I ist ein beliebiges Intervall, das B enthält.

Satz 10.7

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ zulässig und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$. f ist auf B genau dann R-integrierbar, wenn f auf B beschränkt und fast überall stetig ist.

Beweis

$f \cdot \chi_B$ hat im Vergleich zu B höchstens auf dem Rand ∂B zusätzliche Unstetigkeiten. Da ∂B eine Nullmenge ist, ist $f \cdot \chi_B$ auf jedem Intervall $I \supset B$ fast überall stetig (da f auf B fast überall stetig war). Daraus folgt die R-Integrierbarkeit mit dem Lebesgue-Kriterium.

Andersherum folgt aus der R-Integrierbarkeit von f auf B die von $f \cdot \chi_B$ auf $I \supset B$. Nach dem Lebesgue-Kriterium ist f auf B beschränkt und $f \cdot \chi_B$ ist fast überall stetig auf I , somit auch f auf B . ■

Definition 10.8

Jordan-Inhalt

1. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ zulässig. Dann wird der **Jordan-Inhalt** $|B|$ von B definiert durch $|B| := \int_B \chi_B(x) dx$.
2. Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ hat den Jordan-Inhalt Null (d.h. B ist eine **Jordan-Nullmenge**), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Intervalle I_1, \dots, I_k gibt mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^k I_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^k |I_j| < \varepsilon$$

10.2 Allgemeine Eigenschaften des Integrals

1. $R(B)$ ist ein Vektorraum (sogar eine Algebra) und es gilt

$$\int_B (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_B f(x) dx + \mu \int_B g(x) dx$$

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_B f(x) dx \geq 0$$

Das heißt: Die Abbildung $f \mapsto \int_B f(x) dx$ ist ein positives lineares Funktional auf $R(B)$.

- 2.1. Aus der Positivität folgt:

$$f, g \in R(B) \wedge f \leq g \Rightarrow \int_B f(x) dx \leq \int_B g(x) dx$$

- 2.2. Für $m \leq f \leq M$ und $g \geq 0$ auf B ist

$$\begin{aligned} m \int_B 1 dx &\leq \int_B f(x) dx \leq M \int_B 1 dx \\ m \cdot |B| &\leq \int_B f(x) dx \leq M \cdot |B| \\ m \int_B g(x) dx &\leq \int_B f(x) g(x) dx \leq M \int_B g(x) dx \end{aligned}$$

Hieraus erhält man einen Mittelwertsatz: Sei $m := \inf_{x \in B} f(x)$ und $M := \sup_{x \in B} f(x)$. Dann gilt:

$$\exists \alpha \in [m, M] : \int_B f(x) dx = \alpha \cdot |B|$$

Wenn f auf B stetig und B zusammenhängend ist, dann existiert ein $x_0 \in B$ mit $f(x_0) = \alpha$, also

$$\int_B f(x) dx = f(x_0) \cdot |B|$$

3.1. Verschwindet $f \in R(B)$ fast überall in B , so ist $\int_B f(x) dx = 0$. Zum Beweis: Sei $I \supset B$. Betrachte zum Integral von $f \cdot \chi_B$ über I eine beliebige Zwischensumme, d.h. $I = \bigcup I_j$ und $\xi_j \in I_j$ mit $f(\xi_j) = 0$. (Solche ξ_j existieren in jedem I_j , denn $f \cdot \chi_B$ ist fast überall in I stetig, also auch in jedem I_j , denn $|I_j| > 0$.) Also ist jede dieser Zwischensummen Null, also auch der Limes für jede Zerlegungsnullfolge.

3.2. Sind $f, g \in R(B)$ fast überall in B gleich, so ist $\int_B f(x) dx = \int_B g(x) dx$. Zum Beweis wende 3.1. auf die fast überall verschwindende Funktion $f - g$ an.

4.1. Additivität bzgl. B : B_1 und B_2 seien zulässig und f auf $B_1 \cup B_2$ definiert. Dann gilt:

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dx \text{ und } \int_{B_1 \cap B_2} f dx \text{ existieren} \Leftrightarrow \int_{B_1} f dx \text{ und } \int_{B_2} f dx \text{ existieren}$$

4.2. Für $|B_1 \cap B_2| = 0$ ist $\int_{B_1 \cup B_2} f dx = \int_{B_1} f dx + \int_{B_2} f dx$.

Wenn A eine zulässige Jordan-Nullmenge ist (z.B. $A = B_1 \cap B_2$), dann ist $\int_A f dx = 0$; damit folgt

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dx = \int_{B_1} f dx + \int_{B_2} f dx - \int_{B_1 \cap B_2} f dx$$

5. Falls $\int_B f dx = 0$ und $f \leq 0$ auf $I \supset B$ (oder B) ist, dann ist fast überall $f = 0$. Zum Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $f(a) = 0$ für jedes $a \in I$, in dem f stetig ist (denn dann ist fast überall $f = 0$). Sei $f(a) \geq 0$, dann existiert eine Umgebung $U(a)$ (o.E.d.A. ist diese so klein, dass sie ganz in I liegt) mit $f(x) \geq c > 0 \forall x \in U(a)$ und es folgt für das Integral:

$$\int_I f dx = \int_{I \setminus U(a)} f dx + \int_{U(a)} f dx \geq \int_{U(a)} f dx \geq c \cdot |U(a)| > 0$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist f an allen a mit $f(a) \geq 0$ unstetig und somit an allen Nullstellen stetig.

10.3 Satz von Fubini

Dieser Satz ermöglicht die Berechnung von Integralen letztlich durch Zurückführung auf iterierte eindimensionale Integrale. Zum Satz gelangen wir durch eine Plausibilitätsbetrachtung für den \mathbb{R}^2 .

Sei $I = [a, b] \times [c, d] = X \times Y$. Betrachte die Zerlegung $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_x \times \mathcal{Z}_y$ wie bei der Definition des R-Integrals:

$$\mathcal{Z} = \{J_i \times K_l : J_i \in \mathcal{Z}_x, K_l \in \mathcal{Z}_y\}$$

Mit den Zwischenwerten $(x_i, y_l) = z_{il} \in J_i \times K_l$ kann die Zwischensumme formuliert werden:

$$\sigma = \sum_{i,l} f(x_i, y_l) \cdot |J_i \times K_l| = \sum_{i,l} f(x_i, y_l) \cdot |J_i| \cdot |K_l| = \sum_i \left[\sum_l f(x_i, y_l) \cdot |K_l| \right] \cdot |J_i|$$

⇒ In [...] steht die Zwischensumme zum Integral $\int f(x, y) dy =: F(x)$.

⇒ Die äußere Summe entspricht der Zwischensumme zu $\int_X F(x) dx$.

Summiert man zuerst über i , erhält man eine analoge Interpretation mit vertauschten freien Variablen (x, y) .

Theorem 10.9 Satz von Fubini

Sei $I = J \times K$ ein Intervall in \mathbb{R}^n mit den Intervallen $J \subset \mathbb{R}^k$ und $K \subset \mathbb{R}^l$ (also ist $k + l = n$). Für eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{J \times K} f(x, y) \underbrace{dx dy}_{=d(x,y)} &\equiv \int_{J \times K} f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) dx_1, \dots, dx_k dy_1, \dots, dy_l \\ &= \int_J \left(\int_K f(x, y) dy \right) dx = \int_K \left(\int_J f(x, y) dx \right) dy \end{aligned} \quad (1)$$

Das soll bedeuten: Die unteren **iterierten Integrale** existieren und alle Integrale sind gleich.

Bemerkung

Vorsicht bei unstetigen Funktionen!

Dieser Satz gilt allgemein für integrierbare Funktionen, nicht nur für stetige. Dann muss man sich aber davon überzeugen, dass $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ integrierbar sind. Das braucht man, um $F(x)$ bzw. $F(y)$ überhaupt definieren zu können. Wenn f nur integrierbar ist, muss aus der Existenz der beiden iterierten Integrale nicht folgen, dass f insgesamt integrierbar ist.

Für praktische Rechnungen wird der Satz meist mehrfach angewendet, sodass man nur noch eindimensionale Integrale hat: Sei $I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$. Dann ist

$$\int_I f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \dots \left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] dx_{n-1} \dots \right] dx_1$$

Natürlich kann man auch jede beliebige andere Reihenfolge nehmen, wenn dies die Berechnung vereinfacht.

Beispiel 10.5 Anwendung des Satzes von Fubini

Gesucht ist das Integral der Funktion $f(x, y, z) = z \cdot \sin(x + y)$ auf dem Intervall $I = [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\pi z \sin(x + y) dx \right) dy \right] dz = \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -z \cos(x + y) \Big|_0^\pi dy \right] dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -z \underbrace{(\cos(\pi + y) - \cos y)}_{=-2 \cos y} dy \right] dz = \int_0^1 \left[2z \cdot \sin y \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] dz = \int_0^1 4z dz = 2 \end{aligned}$$

Eine anspruchsvollere Variante des Satzes von Fubini ist die folgende: Sei $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ beschränkt (zum Beispiel ein Intervall) und $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Betrachte $B := \{(x, y) : x \in D, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ und eine Funktion $f \in R(B)$. Dann gilt:

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_D \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Beweis

Wir definieren einen Schnitt B_x von B über x als

$$B_x := \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} & x \in D \\ \emptyset & x \notin D \end{cases}$$

Es ist $\chi_B(x, y) = \chi_D(x) \cdot \chi_{B_x}(y)$. Seien I_x und I_y Intervalle mit $I_x \supset D$ und $I_y \supset B_x \forall x \in D$, also ist $B \subset I_x \times I_y =: I$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y) dx dy &= \int_I (f \cdot \chi_B)(x, y) dx dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) \chi_{B_x}(y) dy \right) \chi_D(x) dx \\ &= \int_{I_x} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) \chi_D(x) dx = \int_D \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

■

Beispiel 10.6

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei der Kreis um den Ursprung mit dem Radius R . Suche das Integral über $y^2 \sqrt{R^2 - x^2}$ in diesem Bereich. B wird durch φ_1 und φ_2 mit $\varphi_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ und $\varphi_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ begrenzt. Beachte, dass der Integrand in x und y gerade ist. (*)

$$\begin{aligned} \int_B y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy &= \int_{-R}^R \left[\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \stackrel{(*)}{=} 4 \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\ &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{4}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx = \dots = \frac{32}{45} R^5 \end{aligned}$$

Will man die Integrationsreihenfolge ändern, ist meist eine Skizze hilfreich, um die stetigen Randfunktionen zu finden. Eventuell muss das Integral in Teilintegrale zerlegt werden. Zum Beispiele ändere man in

$$\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy \right] dx$$

die Integrationsreihenfolge. Dazu muss das Integral in zwei Teilintervalle ($y \leq 0$ und $y \geq 0$) zerlegt werden, weil x von 0 bis zu zwei verschiedenen Graphen läuft. Aus $y = -\sqrt{1-x^2}$ wird $x = \sqrt{1-y^2}$ und aus $y = 1-x$ wird $x = 1-y$.

$$\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy \right] dx = \int_{-1}^0 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_0^{1-y} f(x, y) dx \right] dy$$

10.4 Koordinatentransformationen in Mehrfachintegralen

Seien $B_x \subset \mathbb{R}^n$ und $B_y \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi : B_y \rightarrow B_x$ bijektiv. Es sei f auf B_x integrierbar. f wird mittels Φ zu B_y „übertragen“: $g := f \circ \Phi$ oder $g(x) = f(\Phi(y)) \forall y \in B_y$. Wie muss eine Fkt. F bzw. $F(y)$ aussehen, damit gilt:

$$\int_{B_x} f(x) dx = \int_{B_y} F(y) dy$$

F soll auch g enthalten, also ist $F(y) = g(y)$ mal einen unbekanntem Term. Dieser darf aber nur von Φ abhängen, damit die obige Gleichung für alle Funktionen f gilt. Für die heuristische Betrachtung suchen wir den einfachsten Fall: Φ sei sogar ein Diffeomorphismus und B_y ein Intervall I mit der Zerlegung $I = \bigcup_j I_j$:

$$B_x = \bigcup_j \Phi(I_j) \Rightarrow \int_{B_x} f(x) dx = \sum_j \int_{\Phi(I_j)} f(x) dx$$

Für stetige f existieren nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung $\xi_j = \Phi(\eta_j) \in \Phi(I_j)$ mit

$$\int_{\Phi(I_j)} f(x) dx = f(\xi_j) \cdot |\Phi(I_j)| = f(\Phi(\eta_j)) \cdot |\Phi(I_j)|$$

Das einzige Problem ist: Wie groß ist $|\Phi(I_j)|$ im Vergleich um $|I_j|$? Sei allgemein A eine jordanmessbare Menge, dann ist auch $\Phi(A)$ jordanmessbar. Um eine Idee zu bekommen: Sei Φ eine lineare Abbildung L und A sei ein Intervall I . Dann ist $L(I)$ ein Parallelepipet. Man kann zeigen:

$$|L(I)| = (\det L) \cdot |I| = |\det \Phi'| \cdot |I|$$

Letzteres folgt aus der Gleichheit von Abbildung und Ableitung bei einer linearen Abbildung. Um die Klasse der Abbildung Φ für die Koordinatentransformation näher zu bestimmen, benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 10.10 Lipschitzstetigkeit

Eine Abbildung $\Psi : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt in D **lipschitzstetig**, wenn es eine Konstante $L > 0$, die sogenannte **Lipschitzkonstante**, gibt mit $\|\Psi(y_1) - \Psi(y_2)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^m} \quad \forall y_1, y_2 \in D$.

Bemerkung

1. Ist Φ stetig differenzierbar, so ist Φ automatisch auf jeder kompakten Teilmenge von B_y lipschitzstetig.
2. Offenbar folgt aus Lipschitzstetigkeit auch Stetigkeit, das heißt, die Lipschitzstetigkeit ist stärker als die normale Stetigkeit.

Beweis

Für $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}^m$ geht $\|y - y_n\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ und somit auch $\|\Psi(y) - \Psi(y_n)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|y - y_n\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$. Also konvergiert $\Psi(y_n) \rightarrow \Psi(y)$, also ist Ψ stetig. ■

Theorem 10.11 Koordinatentransformation in Mehrfachintegralen

Seien $B_y \subset \mathbb{R}^n$ offen und jordanmessbar und $\Phi : B_y \rightarrow B_x \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, bijektiv und lipschitzstetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $B_x = \Phi(B_y)$ ist jordanmessbar.
2. f und $F := (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|$ sind auf B_x bzw. B_y gleichzeitig riemannintegrierbar. Im Falle der Integrierbarkeit ist

$$\int_{B_x} f(x) dx = \int_{B_y} f(\Phi(y)) \cdot |\det \Phi'(y)| dy$$

Zusatz:

- (a) Jede jordanmessbare Fläche $B \subset \overline{B_y}$ besitzt ein jordanmessbares $C = \Phi(B)$ mit

$$|C| = |\Phi(B)| = \int_B |\det \Phi'(y)| dy$$

- (b) Die obigen Bedingungen für Φ dürfen auf einer *Jordannullmenge* verletzt werden.

Bemerkung

Der Zusatz ist für Anwendungen von fundamentaler Bedeutung, wenn man die üblichen Koordinatentransformationen, zum Beispiel Polar- oder Kugelkoordinaten, benutzen will.

Beispiele für Anwendungen

1. *Ebene Polarkoordinaten:* Betrachte den \mathbb{R}^2 und $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$. Φ bildet den Streifen $B := \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ eineindeutig auf $C := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ ab. Natürlich schreibt man einfacher $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$.

$$\det \Phi'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0$$

Φ ist sogar ein Diffeomorphismus, ist also auf jeder kompakten Teilmenge von B lipschitzstetig.

Anwendung: Betrachte $A := \{(x, y) : 0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta < 2\pi, 0 \leq r \leq h(\varphi)\}$, hierbei ist $h \geq 0$ stetig. Gesucht ist der Flächeninhalt von $\Phi(A)$. Es ergibt sich die **Leibniz'sche Sektorformel**:

$$|\Phi(A)| = \int_{\Phi(A)} dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_0^{h(\varphi)} \underbrace{\det \Phi'(r, \varphi)}_{=r} dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} h^2(\varphi) d\varphi$$

2. *Räumliche Polar- bzw. Kugelkoordinaten:* Betrachte den \mathbb{R}^3 und

$$\Phi(r, \varphi, \vartheta) = (x, y, z)^T = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)^T \quad \text{mit} \quad r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi$$

Es ist $\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \sin \vartheta$. Damit kann man sehr leicht etwa das Volumen einer Kugel berechnen.

11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Bei Kurvenintegralen konnte man über Funktionen oder über Vektorfelder integrieren. Im ersten Falle war die Orientierung nicht von Bedeutung, im zweiten Falle schon.

Wir wollen nun die Kenntnisse zu Kurvenintegralen auf k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n erweitern und insbesondere den k -dimensionalen Inhalt einer Untermannigfaltigkeit bestimmen. Wodurch werden in Analogie zu Kurven die Vektorfelder ersetzt? Was versteht man unter der Orientierung einer Untermannigfaltigkeit? Bei Untermannigfaltigkeiten hat man zudem zu beachten, dass man im Allgemeinen nur einen Satz von Karten, also *lokaler* Parameterdarstellungen hat. Wie gelangt man vom Lokalen zum Globalen?

Natürlich braucht man auch Integralsätze. Die zentrale Frage ist die nach dem Zusammenhang zwischen einem Integral über eine Untermannigfaltigkeit und dem Integral über den Rand der Untermannigfaltigkeit. Hier kommt wiederum die Frage auf, wie dieser Rand aussieht.

11.1 Integration skalarer Funktionen über Untermannigfaltigkeiten

Zunächst führen wir im \mathbb{R}^3 eine Plausibilitätsbetrachtung durch. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, zu deren Beschreibung eine Parameterdarstellung $\Phi : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ ($\Phi(T) = M$) genügen möge. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und das Integral von f über M gesucht. In Anlehnung an die Definition des Riemannintegrals würde man das Intervall T in Teilintervalle T_i zerlegen, in den zugehörigen $M_i := \Phi(T_i)$ Zwischenpunkte ξ^i festlegen und versuchen, eine Zwischensumme aufzuschreiben:

$$\sigma = \sum_i f(\xi^i) |M_i|$$

Das einzige Problem ist: Was ist $|M_i|$? Die Idee ist, M_i auf die Tangentialebene an M im Punkt ξ^i zu projizieren; es entsteht ein ebenes Flächenstück, das man gut zu messen hofft.

Genauer: Sei $\xi = \Phi(t) = \Phi(t_1, t_2) \in M$. Die Tangentialebene T an M in ξ wird von $\Phi_{t_1}(t)$ und $\Phi_{t_2}(t)$ aufgespannt. Betrachte nun ein Rechteck $Q \in T$ mit den Seitenlängen Δt_1 und Δt_2 . Das Bild dieser Menge sei $M' = \Phi(Q) \subset M$. $|M'|$ kann nun durch den Inhalt des von $\Delta t_1 \Phi_{t_1}(t)$ und $\Delta t_2 \Phi_{t_2}(t)$ aufgespannten Stückes der Tangentialebene approximiert werden:

$$|M'| = \|\Delta t_1 \Phi_{t_1}(t) \times \Delta t_2 \Phi_{t_2}(t)\| = \Delta t_1 \Delta t_2 \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\|$$

Mit diesen Erkenntnissen definieren wir *vorläufig* den Inhalt eines zweidimensionalen Flächenstückes im \mathbb{R}^3 und das Integral einer Funktion über ein solches Flächenstück.

Definition 11.1

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\Phi : T \rightarrow \Phi(T) =: M \subset \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit. Weiterhin sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.

1. Unter dem **Inhalt** von M versteht man

$$|M| := \int_T \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\| dt_1 dt_2 \quad (11.1)$$

Man nennt $dS := \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\| dt_1 dt_2 = dS(x)$ das zweidimensionale **Flächenelement** bzgl. Φ .

2. Man setzt

$$\int_M f dS := \int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \|\Phi_{t_1}(t) \times \Phi_{t_2}(t)\| dt_1 dt_2 \quad (11.2)$$

Bemerkung

Um die in (11.1) und (11.2) gegebenen Definitionen zu rechtfertigen, muss man zeigen, dass sie von der Parameterdarstellung unabhängig und zu den bekannten Inhalten einfacher Mengen kongruent sind. Außerdem müssen weitere vernünftige Forderungen an den Inhalt, zum Beispiel die Bewegungsinvarianz, erfüllt sein.

Beispiel 11.1

Oberfläche der Einheitskugel

Sei $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Aus S_1 entfernen wir die Nullstellenmenge

$$A := \{(x, 0, z) \in S_1 : x \geq 0\}$$

Für $S_1 \setminus A$ hat man die Parameterdarstellung $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (x, y, z)$ mit $x = \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = \sin \varphi \sin \vartheta$ und $z = \cos \vartheta$. (φ und ϑ sind also die Äquivalente zu t_1 und t_2 .) Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi &= (-\sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, 0) \\ \Phi_\vartheta &= (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta) \end{aligned}$$

Nach einiger Rechnung erhält man $\|\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta\| = \sin \vartheta$ (positiv im gewählten Parameterbereich) und für den Inhalt

$$|S_1 \setminus A| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi$$

A ist eine Nullmenge und kann vernachlässigt werden, somit ist $|S_1| = 4\pi$.

Die Definition 11.1 kann so nicht auf k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n erweitert werden; das Vektorprodukt ist hier ungeeignet und für $n \neq 3$ nicht definiert. Aus der Linearen Algebra, der Physik oder durch Nachrechnen weiß man aber

$$\|a \times b\|^2 = \langle a \times b, a \times b \rangle = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle$$

Dies wenden wir auf $a = \Phi_{t_1}$ und $b = \Phi_{t_2}$ an:

$$\|\Phi_{t_1} \times \Phi_{t_2}\|^2 = \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_1} \rangle \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_2} \rangle - \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_2} \rangle \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_1} \rangle \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_1} \rangle & \langle \Phi_{t_1}, \Phi_{t_2} \rangle \\ \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_1} \rangle & \langle \Phi_{t_2}, \Phi_{t_2} \rangle \end{vmatrix}$$

Die Matrix rechts heißt **Maßtensor** (g_{ij}) mit $g_{ij} = \langle \Phi_{t_i}, \Phi_{t_j} \rangle$. Die Determinante wird meist mit $g := \det(g_{ij})$ bezeichnet, (g_{ij}) heißt auch **Gramsche Matrix** (zu Φ') der Abbildung Φ . In der Literatur

schreibt man auch $(g_{ij}) = \gamma(\Phi')$. Man rechnet nach, dass für Matrizen \mathbf{A} mit den Spalten a^i folgendes gilt:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = (\langle a^i, a^j \rangle)_{i,j}$$

Das heißt, für ein gegebenes Φ ist

$$(g_{ij}(t)) = \Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t) = \left(\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} \right\rangle \right)_{i,j}$$

$$g(t) = \det(g_{ij})(t) = \det(\Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t))$$

Lemma 11.2

Sei A eine (n, k) -Matrix und B eine (k, k) -Matrix, dann gilt:

$$\sqrt{\det[(AB)^T \cdot (AB)]} = \sqrt{\det A^T A} \cdot |\det B|$$

Beweis

$$\det[(AB)^T \cdot (AB)] = \det \underbrace{B^T}_{(k,k)} \underbrace{A^T A}_{(k,k)} \underbrace{B}_{(k,k)} = \underbrace{\det B^T}_{\det B} \cdot \det A^T A \cdot \det B = \det A^T A \cdot (\det B)^2$$

■

Nun soll das Integral einer Funktion über eine beliebige Mannigfaltigkeit definiert werden.

1. Fall: Die gesamte Mannigfaltigkeit kann durch *eine* Parameterdarstellung beschrieben werden.
2. Fall: Eine Parameterdarstellung reicht nicht.

Wiederholung

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (allgemein $G \rightarrow \mathbb{R}$ mit offenem $G \subset \mathbb{R}^n$). Unter dem **Träger** $\text{supp } f$ versteht man die Menge $\text{supp } f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$. Der Träger ist stets abgeschlossen.

Beispiel 11.2

Sei $[a, b]$ beliebig, $[c, d] \subset [a, b]$ und $f = \chi_{(c,d)}$. Dann ist $\text{supp } f = [c, d]$.

Definition 11.3

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es liege einer der folgenden beiden Fälle vor:

1. M hat eine globale Parameterdarstellung $\Phi : \mathbb{R}^k \supset T \rightarrow M$. f sei auf M .
2. $\Phi : T \rightarrow M$ sei eine lokale Parametrisierung. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ habe einen kompakten Träger in $\Phi(T)$ (d.h. $\text{supp } f \subset \Phi(T)$ bzw. $f \circ \Phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ hat in T einen kompakten Träger).

Dann heißt f über M integrierbar, falls

$$f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} = f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{\det \Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t)} \quad (11.3)$$

über T integrierbar ist. In diesem Falle setzt man

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, dt \quad (11.4)$$

Im Fall 1 definiert man den k -dimensionalen **Inhalt** von M mit

$$|M| := \int_T \sqrt{g(t)} \, dt$$

$dS(x)$ heißt **Oberflächenelement** und hat bezüglich einer Parametrisierung Φ die Form

$$dS(x) = \sqrt{g(t)} dt = \sqrt{\det \Phi'^T(t) \cdot \Phi'(t)} dt$$

Bemerkung

1. In jedem Fall muss die Unabhängigkeit von der Parameterdarstellung gezeigt werden.
2. Obige Definition kann leicht in folgender Hinsicht verallgemeinert werden: $\Phi : T \rightarrow M$ sei eine lokale Parameterdarstellung mit $\Phi(T) = V \subset M$. f sei auf V stetig. Dann definiert man:

$$\int_V f(x) dS(x) := \int_T f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, dt$$

Satz 11.4

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit den Parameterdarstellungen $\Phi_j : T_j \rightarrow M$ (bzw. $\Phi_j(T_j) = V \subset M$) für $j = 1, 2$ (z.B. lokale Parameterdarstellungen). f sei auf M stetig (im Falle der lokalen Parametrisierung sei $\text{supp } f \subset V$). Dann gilt:

$$\int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \cdot \sqrt{g^{(1)}(t)} \, dt = \int_{T_2} f(\Phi_2(t)) \cdot \sqrt{g^{(2)}(t)} \, dt$$

Dabei ist $g^{(j)}$ die zu Φ_j gehörende Definition des metrischen Tensors.

Beweis

In Satz 9.21 haben wir (bei Kartenwechseln) festgestellt, dass $h := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : T_1 \rightarrow T_2$ ein Diffeomorphismus ist. Wir benutzen letztlich die Transformationsformel für Mehrfachintegrale.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \circ h & \Phi_1(t) &= \Phi_2(h(t)) \\ \Phi_1' &= \Phi_2' \cdot h' & \Phi_1'(t) &= \Phi_2'(h(t)) \cdot h'(t) \end{aligned}$$

Wir wenden das Lemma 11.2 für $A := \Phi'_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $B := h' : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ an und erhalten

$$\sqrt{g^{(1)}(t)} = \sqrt{\det \Phi_1'^T \cdot \Phi_1'} = \sqrt{\det \Phi_2'^T \cdot \Phi_2' \cdot |\det h'|} \quad \text{mit} \quad \Phi_1'^T \cdot \Phi_1' = (\Phi_2'^T \cdot h') \cdot (\Phi_2' \cdot h')$$

Parametertransformation: $s := h(t)$ mit $h(T_1) = T_2$

$$\begin{aligned} \int_{T_1} f(\Phi_1(t)) \cdot \sqrt{g^{(1)}(t)} \, dt &= \int_{T_1} f(\Phi_2(h(t))) \cdot \sqrt{g^{(2)}(h(t))} \underbrace{|\det h'(t)|}_{=ds} \, dt \\ &= (\text{Transformationsformel}) = \int_{T_2} f(\Phi_2(s)) \cdot \sqrt{g^{(2)}(s)} \, ds \end{aligned}$$

■

Jetzt wird der zweite Fall behandelt: Für M gibt es nur eine lokale Parameterdarstellung. Wir müssen vom Lokalen zum Globalen übergehen.

Definition und Satz 11.5

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Seien $U_1, \dots, U_k \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Dann existieren Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen im \mathbb{R}^n mit kompaktem Träger) mit

1. $\text{supp } \varphi_j \subset U_j$ mit $0 \leq \varphi_j \leq 1 \, \forall j = 1, \dots, k$
2. $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1 \, \forall x \in K$

Die $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ nennt man eine der **Überdeckung** U_1, \dots, U_k **untergeordnete Zerlegung (Partition)** der Eins auf K .

Beweis

O.E.d.A. seien alle U_j beschränkt. Setze

$$K' := \bigcup_{j=1}^k U_j \quad \text{und} \quad U_0 := \mathbb{R}^n \setminus K$$

K' ist natürlich kompakt. Für jedes $x \in K'$ existiert ein r_x und ein $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ mit

$$K(x, 2r_x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < 2r_x\} \subset U_j$$

Dann bilden alle $K(x, r_x)$ für $x \in K'$ eine offene Überdeckung von K' . Da K' kompakt ist, überdecken bereits endlich viele dieser Kugeln K' :

$$\exists x_1, \dots, x_m \in K' : K' \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i, r_{x_i})$$

Für jede dieser $K(x_i, r_{x_i})$ existiert ein $g_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin K(x_i, r_{x_i}) \\ > 0 & x \in K(x_i, r_{x_i}) \end{cases} \Rightarrow \text{supp } g_i \subset K(x_i, 2r_{x_i})$$

Man erhält solche g_i durch „Strecken, Stauchen“ und Translation des „Standardhuts“:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \text{supp } g = \overline{K(0, 1)}$$

Abwandlung, damit der Träger in $K(0, \varepsilon)$ liegt:

$$g(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

c_ε ist hierbei so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 1$ ist. Für $j = 0, 1, \dots, k$ sei nun

$$I_j := \{i \in \{1, \dots, m\} : K(x_i, 2r_{x_i}) \subset U_j\}$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} \psi_j &= \sum_{i \in I_j} g_i \Rightarrow \text{supp } \psi_j \subset U_j \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, k \\ \psi &= \sum_{j=0}^k \psi_j \\ \varphi_j &= \psi_j / \psi \quad \text{für } j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Beachte, dass ψ_0 einen Träger in U_0 hat, also ist $\psi_0(x) = 0 \forall x \in K$. Die φ_j erfüllen alle Bedingungen der Zerlegung der Eins:

$$\text{supp } \varphi_j \subset U_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = \frac{\psi_1(x) + \dots + \psi_k(x)}{\underbrace{\psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots + \psi_k(x)}_{=0}} = 1$$

Für alle $x \notin \text{supp } \psi_j = \text{supp } \varphi_j$ setze natürlich $\varphi_j(x) = 0$. ■

Dies kann man auf kompakte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n anwenden: Dann überdecken endlich viele Karten die Untermannigfaltigkeit.

Definition 11.6

Seien folgende Objekte gegeben:

- $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und f definiert auf M mit kompaktem Träger.
- $\Phi_j : T_j \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V_j \subset M$ für $j = 1, \dots, m$
- $W_j \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $W_j \cap M = V_j$ (siehe Definition der Untermannigfaltigkeit)
- $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_c^\infty$ sei eine der Überdeckung W_1, \dots, W_m untergeordnete Zerlegung der Eins.

Dann setzen wir

$$\int_M f(x) dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_{V_j} (\varphi_j \cdot f)(x) dS(x) \quad (11.5)$$

Bemerkung

Wo ist die kompakte Menge? Das sei $\text{supp } f$. Beachte: $\varphi_j \cdot f \in C_c(M)$ und $\text{supp}(\varphi_j \cdot f) \subset V_j$. Damit sind die in (11.5) rechts stehenden Integrale bereits definiert.

$$\sum_j (\varphi_j \cdot f)(x) = f(x) \cdot \sum_j \varphi_j(x) = f(x)$$

Sei $A \subset M$ und χ_A sei über M integrierbar. Dann setze:

$$|A| := \int_M \chi_A(x) \, dS(x) = \int_A dS(x)$$

11.2 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Sei V ein k -dimensionaler Vektorraum mit den Basen $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_k)$ und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \dots, w_k)$. Die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ sei definiert durch

$$\sum_j a_{ij} v_j = w_i \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$

Dann heißen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 **gleichorientiert**, wenn $\det \mathbf{A} > 0$. Dadurch ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Basen definiert. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Eine **Orientierung** in V festzulegen, heißt, eine Äquivalenzklasse auszuzeichnen und die darin liegenden Basen als **positiv orientiert** zu bezeichnen. Wir vereinbaren, dass die kanonischen Basen (e_1, \dots, e_n) des \mathbb{R}^n positiv orientiert seien.

Komplizierter ist die Orientierbarkeit und Orientierung von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Benutze dazu die Tangentialräume $T_a(M)$, um eine Orientierung einzuführen. Wie entstehen Basen in $T_a(M)$?

Sei $\Phi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarst. und $c \in T$ mit $\Phi(c) = a \in M$. $T_a(M)$ hat die Basis

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c)$$

Das heißt: $\Phi'(c)$ bildet \mathbb{R}^k eindeutig auf $T_a(M)$ ab, und zwar so, dass

$$\Phi'(c)e_j = \frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(c) \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$

Wir nennen eine beliebige Basis (v_1, \dots, v_k) von $T_a(M)$ **positiv orientiert**, wenn sie Bild einer positiv orientierten Basis des \mathbb{R}^k unter der linearen Abbildung $\Phi'(c)$ ist. Mit anderen Worten: (v_1, \dots, v_k) ist in $T_a(M)$ positiv orientiert, wenn

$$\left((\Phi^{-1})'(a)v_1, \dots, (\Phi^{-1})'(a)v_k \right)$$

positiv orientiert ist.

Definition 11.7

Eine Untermannigfaltigkeit M heißt **orientierbar**, wenn es eine lokal verträgliche Menge von Orientierungen der Tangentialräume an M gibt, d.h. es gibt ein System \mathcal{O} von (Φ, T_Φ) oder (h, W_h) mit

1. $\bigcup_{W \in \mathcal{O}} W = M$ (d.h. die Karten bilden einen Atlas)
2. Seien $V, W \in \mathcal{O}$ mit $V \cap W \neq \emptyset$, dann liefern (h, W) und (g, V) für alle $a \in V \cap W$ die gleiche Orientierung von $T_a(M)$. Mit anderen Worten: Ist (b_1, \dots, b_k) eine beliebige Basis des $T_a(M)$, dann sind $(g'(a)v_1, \dots, g'(a)v_k)$ und $(h'(a)w_1, \dots, h'(a)w_k)$ in \mathbb{R}^k gleichorientiert.

Mitunter versteht man unter einer Orientierung auch ein maximales System \mathcal{O} mit obigen Eigenschaften.

Umformulierung: Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U_1 \rightarrow U_2$ ein Diffeomorphismus.

- f heißt **orientierungstreu**, wenn $\det f'(x) > 0 \forall x \in U_1$.
- f heißt **orientierungsumkehrend**, wenn $\det f'(x) < 0 \forall x \in U_1$.

Seien $\Phi_i : T_i \rightarrow W_i$ zwei Parametrisierungen bzw. (h_i, W_i) zwei Karten. Dann sind $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ bzw. $h_2 \circ h_1^{-1} : T_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow T_2 \subset \mathbb{R}^k$ Diffeomorphismen (Kartenwechsel). $(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)'$ bzw. $(h_2 \circ h_1^{-1})'$ sind linear invertierbare Abbildungen. Man nennt den Kartenwechsel orientierungserhaltend (bzw. gleichorientiert), wenn $\det (h_2 \circ h_1^{-1})' > 0$. Für $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ sind die Karten automatisch gleichorientiert.

Lemma 11.8

Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas aus gleich orientierten Karten gibt.

Beweis in der Sprache der Parametrisierungen

Es ist $\Phi_i : T_i \rightarrow W_i$ mit $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ und $\Phi_1(t_1) = \Phi_2(t_2) = a \in W_1 \cap W_2$. Setze $f := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, also ist $\Phi_1 = \Phi_2 \circ f$ und somit $\Phi_1' = \Phi_2' \cdot f'$. Φ_1 und Φ_2 liefern genau dann im Punkt a dieselbe Orientierung, wenn $\det f'(t_1) > 0$ ist. ■

Ein Spezialfall sind $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

Lemma 11.9

Sei M eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , dann existiert eine eindeutige Beziehung zwischen den Orientierg. von M und den stetigen Einheitsnormalenvektorfeldern auf M .

Dies wird wie folgt erreicht: Sei \mathcal{O} eine Orientierung auf M und $a \in M$. Dann hat $T_a(M)$ die Dimension $n - 1$. In \mathbb{R}^n gibt es zwei auf $T_a(M)$ orthogonale Einheitsvektoren (\uparrow und \downarrow). Zu a möge eine Parametrisierung Φ gehören mit $\Phi(c) = a$. Wähle den Einheitsnormalenvektor $n(a)$ so, dass

$$(n(a), \Phi'(c)e_1, \dots, \Phi'(c)e_{n-1}) \quad (*)$$

im \mathbb{R}^n positiv orientiert ist. Dann erhält man ein Vektorfeld mit den gesuchten Eigenschaften. Wenn ein solches Vektorfeld existiert, ist durch $(*)$ eine Orientierung auf M gegeben.